Vorlesung im WS 2013 / 14

Endlichdimensionale Algebren über Körpern

V: Montag 10-12 und Donnerstag 14-16 in MZH 6340
Ü: Mittwoch 12-14 in MZH 6340

Eine Algebra über einem Körper K ist ein K-Vektorraum A mit einer K-bilinearen Multiplikation A x A$\rightarrow$A, geschrieben $a \cdot b$. Im Kurs geht es um assoziative Algebren mit Eins, d.h. es soll zusätzlich gelten:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ und } 1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Im kommutativen Fall gibt es eine enge Beziehung zur Galois Theorie, darauf werde ich jedoch nicht näher eingehen.
Im allgemeinen Fall spielen die Divisionsalgebren (in der alle Elemente $\neq 0$ ein Inverses haben) eine besondere Rolle – das erste Beispiel ist die Quaternionenalgebra über $K = \mathbb{R}$.
Sie gehören in den Kontext der Zentralen Einfachen Algebren, von denen sich herausstellt, dass sie jeweils eine Matrixalgebra über einer Divisionsalgebra sind.
Die Zentralen Einfachen Algebren sind von großer Bedeutung in der Algebraischen Zahlentheorie, es gibt aber auch eine angewandte Seite. In dem gerade erschienenen Werk

G. Berhuy/ F. Oggier: „An Introduction to Central Simple Algebras and Their Applications to Wireless Communication“

wird auseinandergesetzt, wie man sie zur Konstruktion von Codes benutzen kann.

In der Strukturtheorie der Algebren arbeitet man mit linearen Darstellungen, d.h. linearen Operationen A x V $\rightarrow$V auf K-Vektorräumen V, die zu Homomorphismen φ:A$\rightarrow$GL(V) per $\varphi(a)(x) = a \cdot x$ führen.
Das ist dann ein großes Gebiet, welches insbesondere die Darstellungstheorie endlicher Gruppen enthält, denn zu einer Gruppe G hat man ja die Gruppenalgebra K[G] (mit den Elementen von G als Basis).
Hierzu gibt es eine schöne Einführung

P. Etingof et al: „Introduction to Representation Theory”.

Sie gipfelt im Satz von P. Gabriel über lineare Darstellungen von Köchern. Ein Köcher ist ein gerichteter Graph, bestehend aus Ecken und Pfeilen p:s $\rightarrow$ t, welche zwei Ecken verbinden.
Einem Köcher wird dann eine Algebra so zugeordnet, dass die linearen Darstellungen der Algebra durch eine Kollektion von Vektorräumen V_e zu den Ecken e und linearen Abbildungen $f_p : V_s \rightarrow V_t$ zu den Pfeilen p gegeben sind (wobei dem Zusammensetzen von Pfeilen die Komposition der zugeordneten linearen Abbildungen entsprechen soll).
Der Satz besagt dann: Ein Köcher hat genau dann nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen, wenn der zu Grunde liegende Graph ein Dynkin-Diagramm vom Typ A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ist.

Im Kurs werde ich die oben angesprochenen Aspekte behandeln, den Satz von Gabriel allerdings nur, wenn die Zeit dafür reicht.

Vorkenntnisse: Lineare Algebra und Algebraisches Denken. Tensorpunkte von Moduln etc. werden im Kurs entwickelt.

Es kann ein Übungsschein erworben werden, auf Wunsch gibt es eine Modulprüfung (Wahlpflichtfach).

I`ll be happy to teach the course in English if that is what the participants desire.

Näheres bei J. Gamst
MZH 7110; gamst@math.uni-bremen.de