Vorlesung im WS 2011/12

Klassenkörper Theorie

V: Montag 10-12 in 6340, Donnerstag 14-16 in 7200
Ü: Mittwoch 12-13 in 7050

In der Klassenkörper Theorie geht es um abelsche Erweiterungen K/k. Im „globalen Fall“ ist der Grundkörper k ein Zahlkörper, d.h. endlich über $\mathbb{Q}$ oder ein Funktionenkörper, d.h. endlich über einem Körper der Form $\mathbb{F}_q$(X), im „lokalen Fall“ ist k ein p-adischer Körper.
In der Algebraischen Zahlentheorie lernt man, dass es zu Primidealen $\mathfrak{p}$ in k und $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ in K Frobeniuselemente ($\mathfrak{p}$, K/k) in Gal (K/k) gibt, welche den Automorphismus $x \to x^{N\mathfrak{p}}$ der Restklassenerweiterung $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ induzieren - sogar eindeutig, wenn $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist. Wenn überdies die Erweiterung abelsch ist, dann hängt das Frobeniuselement nicht von der Wahl des Primideals über $\mathfrak{p}$ ab, und durch multiplikative Fortstsetzung entsteht der Artin- Homomorphismus

$$\psi_{K/k} : I(\vartheta) \to \mathrm{Gal(K/k)},$$

der definiert ist auf der Gruppe $I(\vartheta)$ der zur Diskriminate ϑ von K/k teilerfremden gebrochenen Ideale. Aus nichttrivialen Gründen, z.B auf Grund des Satzes von *Čebatarev*, ist $\psi_{K/k}$ surjektiv.
Es ist nun entscheidend, dass man Zyklen $\mathfrak{c}$ betrachtet, die ϑ enthalten: das sind endliche Kollektionen von Primidealpotenzen $\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}$ und reellen Einbettungen $\sigma : k \to \mathbb{R}$.
$\psi_{K/k}$ ist dann auch auf I ($\mathfrak{c}$) definiert, und für geeignete $\mathfrak{c}$ ist der Kern von $\psi_{K/k}$ auf I($\mathfrak{c}$) von der Form $P_\mathfrak{c}\mathcal{N}(\mathfrak{c})$ - dabei ist $\mathcal{N}(\mathfrak{c})$ die Gruppe der Normen der zu $\mathfrak{c}$ teilerfremden gebrochenen Ideale von K und P$_\mathfrak{c}$ die Gruppe der gebrochenen Hauptideale (α) mit $\alpha \equiv 1$ mod$^\star\mathfrak{c}$, d.h.v$_\mathfrak{p}(\alpha - 1) \geq m_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{c}$, $\sigma(\alpha) > 0$ für σ in $\mathfrak{c}$. Also: $I(\mathfrak{c})/P_\mathfrak{c}\mathcal{N}(\mathfrak{c}) \cong Gal(K/k)$
Diese Aussage heisst Artinsches Reziprozitätsgesetz, derartige Zykel nennt man Führer des Artin-Homomorphismus. Im Spezialfall einer quadratischen Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ mit Diskriminante d ist Frob $(p, K/R)$ für $p \nmid d$ durch das Legendre Symbol $(\frac{d}{p})$ gegeben, also $\psi_{K/k}(x) = (\frac{d}{x})$ für x teilerfremd zu d.
Ein Führer ist in diesem Fall $|d|$, und das Artinsche Reziprozitätsgesetz liefert, dass $(\frac{d}{x})$ nur von $|d|$ abhängt - woraus man sofort das Quadratische Reziprozitätsgesetz gewinnt.
Der Existenzsatz der Klassenkörper Theorie besagt, dass es zu jedem Zykel $\mathfrak{c}$ auch eine Erweiterung $H_\mathfrak{c}/k$ gibt, sodass man einen Isomophismus
ψ: I $(\mathfrak{c})/P_\mathfrak{c}\mathcal{N}(\mathfrak{c}) \cong Gal(H_\mathfrak{c}/k)$ hat.

$H_{\mathfrak{c}}$ ist die maximale abelsche Erweiterung von k, in der alle Primhauptideale in $P_{\mathfrak{c}}$ vollständig zerfallen.
Insbesondere bei $\mathfrak{c} = (1)$: $H_{(1)}$ ist die grösste abelsche Erweiterung von k, in der alle „Primstellen"(Primideale oder Einbettung nach $\mathbb{C}$) unverzweigt sind. Man hat dann $Gal(H_{(1)}/k) \cong$ Klassengruppe von k und
$H_{(1)}$ heisst Hilbertscher Klassenkörper von k. Natürlich gilt $H_{(1)} = \mathbb{Q}$ für
$k = \mathbb{Q}$, aber schon bei imaginärquadratischen $K/\mathbb{Q}$ sind die Hilbertschen Klassenkörper ein faszinierender Gegenstand, der bereits im 19. Jahhundert Anlass zu tiefsinnigen Untersuchungen gab.

Literatur

J.W.S Cassels/A. Fröhlich eds: „Algebraic Number Theory"
Academic Press 1967
dort insbesondere

J.P Serre: „Local Class Field Theory"
J. Tate: „Global Class Field Theory"
H. Hasse: „History of Class Field Theory"

H. Cohen/P. Stevenhagen: „Computational Class Field Theory"
in MSRI ♯44 : „Algorithmic Algebraic Number Theory"
Cambridge Univ. Press 2008

S. Lang: „Algebraic Number Theory"
Addison-Wesley 1970

J. Neukirch: „Algebraische Zahlentheorie"
Springer 1992

J.-P. Serre: „Corps Locaux"
Paris 1962