Sommersemester 2010
Universität Bremen
Fachbereich 03 - Mathematik

Einführung in die Theorie der Kettenbrüche

- Mit einem Einblick in die Ergodentheorie -

Bachelorarbeit

im Studiengang 2-Fach Bachelor Mathematik

eingereicht von: **Mareike Best**

eingereicht am: 21. Juli 2010

Betreuer: Prof. Dr. Bernd O. Stratmann

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Theorie der Kettenbrüche. Die Darstellung einer irrationalen Zahl durch einen Kettenbruch wird zunächst an einigen Beispielen dargestellt. Weiterhin wird der geschichtliche Hintergrund umrissen. Die Beweise mehrerer diophantischer Gleichungen erfolgt auf der Grundlage einiger elementarer Lemmata und der Einführung der Zwischenbrüche. Des Weiteren werden quadratische Irrationalitäten sowie schlecht approximierbare Zahlen in Bezug zu der Kettenbruchentwicklung betrachtet. Danach werden einige Ergebnisse der Ergodentheorie dargestellt und auf die Gauß-Abbildung angewendet. Abschließend werden mehrere Asymptoten gezeigt.

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie der Kettenbrüche. Kettenbrüche können zur Approximation von rationalen sowie irrationalen Zahlen genutzt werden und haben als einfache Kettenbrüche die folgende Form:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + ...}}}}.$$

Die dargestellten Variablen a_1, a_2,... sind im Folgenden immer ganze natürliche Zahlen (ohne die Null) - a_0 stammt aus $\mathbb{Z}$. Kettenbrüche können auch Ausdrücke beinhalten, die keine natürlichen Zahlen sind. Solche Fälle werden im Folgenden nicht betrachtet. In der vorliegenden Arbeit werden nur einfache Kettenbrüche betrachtet, welche eine irrationale Zahl approximieren.

Die Darstellung einer irrationalen Zahl durch einen einfachen Kettenbruch endet nicht. Wird die Entwicklung nicht abgebrochen, dann entspricht dieser Kettenbruch der irrationalen Zahl. Wenn sie abgebrochen wird, dann wird der Bruch, der sich aus der endlichen Kettenbruchentwicklung ergibt, Näherungsbruch genannt. Dieser Näherungsbruch bietet eine Approximation an die irrationale Zahl. In dieser Arbeit werden vielfältige Eigenschaften dieser Approximation in Lemmata und Sätzen dargestellt und bewiesen. Die dargestellten Eigenschaften und Sätze lassen sich ohne Weiteres auf die Kettenbrüche, die eine *rationale* Zahl approximieren, übertragen. Die Einschränkung auf die irrationalen Zahlen erfolgt zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit. So muss nicht in jeder Darstellung und jedem Beweis der rationale Fall als Spezialfall erwähnt werden.

Außerdem werden Kettenbrüche benutzt, um die irrationalen Zahlen in verschiedene Klassen aufzuteilen. So gibt es gewisse irrationale Zahlen, die sich nur schlecht durch einen Kettenbruch annähern lassen. Die Menge dieser Zahlen hat jedoch unter dem Lebeque-Maß den Wert Null.

Zunächst wird in Abschnitt 2 ein kurzer Einblick in die Geschichte der Kettenbrüche gegeben. Dann wird in Abschnitt 3 die Entwicklung eines Kettenbruchs beispielhaft dargestellt. Im Abschnitt 4 werden einige Eigenschaften der Kettenbrüche gezeigt, die in den ersten vier Lemmata zusammengestellt werden. Außerdem wird ein Merkmal des Medians zweier Brüche in Lemma 5 bewiesen, welches bei der Betrachtung von speziellen Medianen, den Zwischenbrüchen, in Abschnitt 6 wichtig ist. Des Weiteren wird gezeigt, dass die Darstellung eines Kettenbruchs eindeutig ist. Die ersten vier Lemmata werden in vielen Beweisen der nachfolgenden Sätze benötigt. Das Konvergenzverhalten der Kettenbrüche wird in dem Abschnitt 5 untersucht. Für den Beweis der Konvergenz der Kettenbrüche werden noch zwei weitere wichtige Eigenschaften gezeigt. In dem Abschnitt 6 werden die Zwischenbrüche eingeführt. Der Abschnitt 7 beschäftigt sich mit der Güte der Approximation der Näherungsbrüche. Die verschiedenen Sätze bieten eine Abschätzung für den Abstand eines Näherungsbruchs zu der irrationalen Zahl, die durch diesen Näherungsbruch approximiert wird. Dem Zusammenhang zwischen quadratischen Irrationalitäten und den zugehörigen Kettenbrüchen widmet sich der Abschnitt 8. Die schlecht approximierbaren Zahlen, d.h. irrationale Zahlen, deren Kettenbruchentwicklung bestimmte Eigenschaften erfüllt, werden in dem folgenden Abschnitt 9 behandelt. Abschließend folgt eine weitere Betrachtung einiger Eigenschaften der Kettenbrüche mit Hilfe der Ergodentheorie, die zu Beginn des Abschnitts 10 dargestellt wird.

2 Historischer Abriss

Fibonacci (1170-1250) versuchte als erster, eine allgemeine Definition für Kettenbrüche anzugeben. Vor diesem Versuch wurden Kettenbrüche bereits für bestimmte Probleme angewendet und Kettenbruchdarstellungen entwickelt. Schon die alten Griechen haben sich mit der approximativen Vereinfachung von Brüchen beschäftigt, welche mit den Kettenbrüchen zusammenhängen (Vgl. [1], Seite 3, 51).

Die Geschichte der Kettenbrüche begann etwa dritten Jahrhundert vor Christus mit dem euklidischen Algorithmus. Dieser führt zu einem abbrechenden Kettenbruch und ist nach Brezinski eines der besten Beispiele. Die erste unendliche Kettenbruchentwicklung wurde von Iamblichus (Ende des dritten Jh.) und Proclus (410-485) berichtet. Aus geometrischen Überlegungen wurden Näherungen für die Wurzel aus 2 berechnet. Die Gleichungen, die aufgestellt wurden, führen nach einigen Umformungen zu den Formeln der modernen Kettenbruchtheorie, wie sie in Lemma 1 und 2 dargestellt und bewiesen werden. Es gibt noch viele weitere Beispiele, deren Ausführungen hier nicht erfolgen (Vgl. [1], Seite 1, 13-14).

Auch die Schreibweise änderte sich im Laufe der Geschichte mehrfach. So benutzte Cataldi im Jahr 1613 die Form: „$a_0\&\frac{1}{a_1}\&\frac{1}{a_2}\&\frac{1}{a_3}$“. Peano (1858-1932) gab im Jahr 1903 den Kettenbruch die Darstellung „$\frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{a_3}$“. In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Schreibweise benutzt, die wenig Platz in Anspruch nimmt und in einer Zeile notiert werden kann: „$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$“. Die verkürzte Darstellung für Kettenbrüche, deren erstes Element Null ist, hat die folgende Form: $[a_1, a_2, ...] = [0; a_1, a_2, ...]$ (Vgl. [1], Seite 44, 48).

Die bedeutesten Mathematiker, die sich im 18. Jahrhundert mit den Kettenbrüchen beschäftigt haben, waren Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) und Lagrange (1736-1813). Euler bewies unter anderem, dass jede rationale Zahl in einem endlichem Kettenbruch entwickelt werden kann, dass eine irrationale Zahl durch einen unendlichen Kettenbruch dargestellt wird und dass ein periodischer Kettenbruch eine quadratische Irrationalität ist. Lagrange bewies die Rückrichtung der letzten Aussage. Lagrange gab außerdem einen kompletten Beweis für die Lösbarkeit der Pell'schen

Gleichung $x^2 - Ny^2 = 1$ mit $x, y, N \in \mathbb{N}$. Lambert zeigte unter anderem die Irrationalität von π. Im 19. Jahrhundert wurde das Thema der Kettenbrüche populär. So gab zum Beispiel Seidel (1821-1896) die erste präzise Definition der Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche an (Vgl. [1], Seite 97, 109-113).

3 Entwicklung der Kettenbruchdarstellung

Im Folgenden wird beschrieben, wie eine Kettenbruchdarstellung gefunden werden kann. Für irrationale Zahlen können meist nur endlich viele a_k der Kettenbruchentwicklung angegeben werden, ohne dass sich ein mögliches Schemata zeigt. Dies ist zum Beispiel bei der Zahl π der Fall. Auch bei den algebraischen Zahlen ($\{\alpha : a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + ... + a_n\alpha = 0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}\}$) wurde bisher kein solches Gesetz gefunden. Die Ausnahme bilden die quadratischen Irrationalitäten. Am folgenden Beispiel wird die Kettenbruchdarstellung einer quadratischen Irrationalität entwickelt

$$\alpha = \sqrt{12} = 3 + \sqrt{\mathbf{12}} - \mathbf{3} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{12}-3}} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{12}+3}{3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{12}-3}{3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{12}-3}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3(\sqrt{12}+3)}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{12}+3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \sqrt{\mathbf{12}} - \mathbf{3}}}.$$

Damit ist die gesamte Kettenbruchdarstellung bekannt, da sich $\sqrt{12} - 3$ auch im dritten Term finden lässt. Die folgenden Umformungsschritte können unendlich oft wiederholt werden. Der Kettenbruch ist also periodisch: $\sqrt{12} = [3; 26262626...] = [3; \overline{26}]$.

Für eine Bruchzahl ist die Entwicklung der Kettenbruchdarstellung einfacher, da in der Umformung nur rationale Zahlen auftauchen. Für die Zahl $\frac{17}{32}$ ergibt sich ihre Darstellung wie folgt

$$\frac{17}{32} = 0 + \frac{1}{\frac{32}{17}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{15}{17}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{15}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{15}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{15}{2}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}}$$

$$= [0; 1, 1, 7] = [1, 7, 7].$$

In dieser Kettenbruchdarstellung kann sich das letzte Element als 1 ergeben. Dann würde die Darstellung nicht mehr eindeutig sein. Aus diesem Grund wird es nicht erlaubt, bei einem endlichen Kettenbruch 1 als letztes Element zu wählen. Mit diesem Kettenbruch können Approximationen dieser Zahl bestimmt werden. Es kann gezeigt werden, dass dies die beste Approximation ist (Vgl. [2], Seite 22-30). Für den Bruch $\frac{17}{32}$ erscheint es jedoch nicht sinnvoll ihn zu approximieren. Aber falls eine Zahl, wie beispielsweise $\frac{71755875}{61735500}$ angegeben ist, kann es sinnvoll sein, eine Näherung dieses Bruches zu bestimmen, wie beispielsweise $\frac{43}{17}$ (Vgl. [1], Seite 7). Diese Näherungen werden als Näherungsbrüche bezeichnet und werden meist in der Form $\frac{p_k}{q_k}$ beschrieben. Dieser Bruch wird k-ter Näherungsbruch genannt.

Für den Bruch $\frac{17}{32}$ ergeben sich dann die folgenden Näherungen

$$\frac{p_0}{q_0} = 0 \qquad \frac{p_1}{q_1} = 0 + \frac{1}{1} \qquad \frac{p_2}{q_2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 0{,}5 \qquad \frac{p_3}{q_3} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}} = \frac{17}{32}.$$

Für $\sqrt{12}$ ergeben sich in gleicher Art und Weise

$$\frac{p_0}{q_0} = 3 \qquad \frac{p_1}{q_1} = 3{,}5 \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{45}{13} \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{97}{23} \qquad \frac{p_4}{q_4} = \frac{627}{181}.$$

Die Darstellung eines Näherungsbruchs ist zunächst als ein Bruch nicht eindeutig. Deshalb wird im Folgenden eine kanonische Form für die Näherungsbrüche induktiv eingeführt (Vgl. [2], Seite 3-4). Sei also $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Für $\frac{p_0}{q_0}$ wird die kanonische Form als $\frac{a_0}{1}$ gewählt ($ggT(a_0, 1) = 1$). Sei die kanonische Form für die Näherungsbrüche mit $n < k$ schon definiert, d.h. $ggT(p_n, q_n) = 1$ für alle $n < k$. Nun ist zu zeigen, dass sie auch für $k = n$ existiert. Für $[a_1; a_2, ...]$ existiert die kanonische Form des $(k-1)$-ten Näherungsbruchs als $\frac{p^*_{k-1}}{q^*_{k-1}} = [a_1; a_2, ..., a_k]$ mit $ggT(p^*_{k-1}, q^*_{k-1}) = 1$. Damit existiert die kanonische Form auch für $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$ durch

$$[a_0; a_1, ..., a_k] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_k]} = a_0 + \frac{q^*_{k-1}}{p*_{k-1}} = \frac{a_0 p*_{k-1} + q^*_{k-1}}{p*_{k-1}}.$$

Im Weiteren werden die Näherungsbrüche immer durch diese kanonische Form dargestellt. Für alle Näherungsbrüche ist somit der größte gemeinsame Teiler $ggT(p_k, q_k)$ gleich Eins.

Die Darstellung durch einen Kettenbrüche kann auch auf anderer Art bestimmt werden. Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ergeben sich die einzelnen Teilnenner a_k als die Reste v_k. Für ein beliebigen Bruch $\frac{c}{d}$ wird $c = u_0$ und $d = u_1$ festgelegt. Mit dem euklidischen Algorithmus ergibt sich

$$u_0 = u_1 v_1 + u_2 \quad , \quad u_1 = u_2 v_2 + u_3 \quad , \quad u_1 = u_2 v_2 + u_3 \quad , ..., \quad u_{n-1} = u_n v_n,$$

wobei u_k und v_k für alle k in $\mathbb{N}$ liegen. u_k wird durch u_{k+1} geteilt, v_{k+1} ist das abgerundete Ergebnis und u_{k+2} ist der verbliebene Rest. Für diesen Rest muss gelten: $0 \leq u_{k+2} < u_{k+1}$. Dadurch ist die Wahl der einzelnen Zahlen im euklidischen Algorithmus eindeutig.

Der Rest eines Kettenbruchs $r_k = [a_k; a_{k+1}, ...]$ hat die folgende Eigenschaft:

$$[a_0; a_1, ...] = a_0 + \frac{1}{r_1},$$

die sich aus der Darstellung eines Kettenbruchs ergibt.

4 Grundsätzliche Eigenschaften

Sowohl der Zähler als auch der Nenner eines Näherungsbruchs lassen sich durch eine rekursive Formel aus den vorherigen beiden Zählern und Nennern sowie einem Koeffizienten aus der Kettenbruchdarstellung bestimmen. Diese Eigenschaft wird in dem folgenden Lemma dargestellt und bewiesen.

4.1 Rekursive Formel zur Bestimmung von p_k und q_k eines Näherungsbruchs

Lemma 1. *Es gilt für* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$$
$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}$$

Beweis. (Vgl. [2], Seite 5) Der Beweis folgt per Induktion. Die Induktionsvoraussetzung wird bei dem Näherungsbruch für den Kettenbruch, der erst mit dem zweitem Term a_1 beginnt, angewendet. Aus diesem Grund gilt die Induktionsvoraussetzung für die Darstellung für a_{k+1} statt für a_k. Um den Induktionsschritt durchzuführen, werden zunächst einige Bezeichnungen eingeführt. Es wird ein Zusammenhang zwischen den Quotienten der Näherungsbrüche von $[a_0; a_1, ...]$ und $[a_1; a_2, ...]$ hergestellt, der im Beweis genutzt wird.
Sei $\frac{p_k^*}{q_k^*} = [a_1; a_2, ..., a_{k+1}]$, dann gilt

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_0; a_1, ..., a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_{k+1}]} = a_0 + \frac{1}{\frac{p_k^*}{q_k^*}} = a_0 + \frac{q_k^*}{p_k^*} = \frac{a_0 p_k^* + q_k^*}{p_k^*}.$$

und wegen $ggT(p_k, q_k) = 1$ folgt

$$p_{k+1} = a_0 p_k^* + q_k^* \quad \text{und} \quad q_{k+1} = p_k^*. \tag{1}$$

<u>Induktionsanfang</u>: $k = 0$
Für die ersten beiden Näherungsbrüche gilt

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = \frac{a_0}{1} \quad \text{und} \quad \frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Damit gilt

$$p_0 = a_0, \ \ q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad \text{und} \quad q_1 = a_1.$$

Es wird weiterhin festgesetzt

$$p_{-1} = 1 \quad \text{und} \quad q_{-1} = 0.$$

Somit folgt der Induktionsanfang, da

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0a_1 + 1 = a_1p_0 + p_{-1} \\ q_1 &= a_1 = a_1q_0 + q_{-1}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Sei die Formel für jedes beliebige $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ wahr

$$\begin{aligned} p_k &= a_kp_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_kq_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung ist dann auch für $[a_1; a_2, ...]$ wahr. Da in diesem Fall an der $(k+1)$-ten Stelle der Koeffizient a_{k+1} steht, ergibt sich die Induktionsvoraussetzung als

$$p_k^* = a_{k+1}p_{k-1}^* + p_{k-2}^* \quad \text{und} \quad q_k^* = a_{k+1}q_{k-1}^* + q_{k-2}^*, \tag{2}$$

wobei $\frac{p_{k-1}^*}{q_{k-1}^*} = [a_1; a_2, ..., a_k]$ und $\frac{p_{k-2}^*}{q_{k-2}^*} = [a_1; a_2, ..., a_{k-1}]$.
Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$\begin{aligned} p_{k+1} &\overset{(1)}{=} a_0p_k^* + q_k^* \overset{(2)}{=} a_0(a_{k+1}p_{k-1}^* + p_{k-2}^*) + a_{k+1}q_{k-1}^* + q_{k-2}^* \\ &= a_{k+1}(a_0p_{k-1}^* + q_{k-1}^*) + (a_0p_{k-2}^* + q_{k-2}^*) \overset{(1)}{=} a_{k+1}p_k + p_{k-1} \\ q_{k+1} &\overset{(1)}{=} p_k^* \overset{(2)}{=} a_{k+1}p_{k-1}^* + p_{k-2}^* \overset{(1)}{=} a_{k+1}q_k + q_{k-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

4.2 Eine grundlegende Eigenschaft

Das folgende Lemma wird für die Beweise vieler Sätze dieser Arbeit benötigt und ist eine interessante Eigenschaft der Näherungsbrüche.

Lemma 2. *Für alle $k \geq 0$ gilt*

$$\begin{aligned} &(i) \qquad q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1} &= \quad &(-1)^k \\ &(ii) \qquad q_kp_{k-2} - p_kq_{k-2} &= \quad &a_k(-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Beweis. (Vgl. [2], Seite 5-6) Lemma 2 lässt sich aus dem Lemma 1 folgern. Nach wenigen Umformungen des Gleichungssystems aus der Behauptung des Lemmas 1 ergibt sich eine Gleichung, aus welcher durch iteratives Anwenden die Behauptung folgt.
Zu (i): Laut dem Lemma 1 gilt für $k \geq 0$ das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} q_k &= a_kq_{k-1} + q_{k-2} \\ p_k &= a_kp_{k-1} + p_{k-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit q_{k-1} und der zweiten Gleichung mit p_{k-1} ergibt sich

$$\begin{aligned} q_k p_{k-1} =& a_k q_{k-1} p_{k-1} + q_{k-2} p_{k-1} \\ p_k q_{k-1} =& a_k p_{k-1} q_{k-1} + p_{k-2} q_{k-1}. \end{aligned}$$

Nun zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab und erhält

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}).$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Schritte bis $k = 1$ ergibt sich schließlich

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k (q_0 p_{-1} - q_{-1} p_0) = (-1)^k (1 \cdot 1 - 0 \cdot a_0) = (-1)^k.$$

Zu (ii): Beweis analog zu (i). □

4.3 Eigenschaft des Zählers eines Näherungsbruchs

Lemma 3 folgt aus dem Lemma 1 durch vollständige Induktion.

Lemma 3. *Für $k \geq 1$ gilt*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, ..., a_1].$$

Beweis. (Vgl. [2], Seite 7-8)
Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1 = [a_1].$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1] \quad \text{bzw.} \quad q_{k-2} = \frac{q_{k-1}}{[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1]}. \tag{1}$$

Induktionsschluss: Laut dem Lemma 1 ist

$$\begin{aligned} q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \overset{(1)}{=} a_k q_{k-1} + \frac{q_{k-1}}{[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1]} = q_{k-1} \left(a_k + \frac{1}{[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1]} \right) \\ &= q_{k-1} [a_k; a_{k-1}, ..., a_1]. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung □

4.4 Eine Darstellung von $\alpha = [a_0; a_1, ...]$ mit den Termen p_k, q_k und r_k des Kettenbruchs

Auch das folgende Lemma wird in der weiteren Arbeit mehrfach benötigt. Es bietet eine Möglichkeit, α durch p_k, q_k und r_k darzustellen, bei geeigneter Wahl der Indizes. Der Beweis von Lemma 4 folgt wieder per Induktion. Die Hauptidee der Beweise von Lemma 1 und 4 ist identisch. Auch in diesem Beweis erfolgt das Anwenden der Induktionsvoraussetzung bei dem Näherungsbruch für den Kettenbruch, der erst mit dem Term a_1 beginnt. Sei

$$\frac{p_k^*}{q_k^*} = [a_1; a_2, ..., a_{k+1}] \quad \text{und} \quad r_k^* = [a_{k+1}; a_{k+2}, ...]. \tag{1}$$

Dann gilt (Vgl. Beweis von Lemma 1)

$$p_{k+1} = a_0 p_k^* + q_k^* \quad \text{und} \quad q_{k+1} = p_k^*. \tag{2}$$

Lemma 4. *Für $k \geq 1$ gilt*

$$[a_0; a_1, ...] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Der Beweis erfolgt in Anlehnung an ([7], Seite 7), unterscheidet sich aber in der Beweisstruktur von dem dort geführten Beweis.

Beweis. Die Behauptung wird per vollständiger Induktion gezeigt.
Induktionsanfang: Für $k = 1$ folgt

$$[a_0; a_1, ...] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ...]} = a_0 + \frac{1}{r_1} = \frac{a_0 r_1 + 1}{r_1} = \frac{a_0 r_1 + 1}{1 \cdot r_1 + 0} = \frac{p_0 r_1 + p_{-1}}{q_0 r_1 + q_{-1}}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte

$$[a_0; a_1, ...] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Induktionsschritt: $k \to k+1$
Es gilt laut Induktionsvoraussetzung

$$[a_1; a_2, ...] = \frac{p_{k-1}^* r_k^* + p_{k-2}^*}{q_{k-1}^* r_k^* + q_{k-2}^*}. \tag{3}$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, ...] &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ...]} \overset{(3)}{=} a_0 + \frac{q_{k-1}^* r_k^* + q_{k-2}^*}{p_{k-1}^* r_k^* + p_{k-2}^*} = \frac{a_0 (p_{k-1}^* r_k^* + p_{k-2}^*) + q_{k-1}^* r_k^* + q_{k-2}^*}{p_{k-1}^* r_k^* + p_{k-2}^*} \\ &= \frac{r_k^* (a_0 p_{k-1}^* + q_{k-1}^*) + a_0 p_{k-2}^* + q_{k-2}^*}{p_{k-1}^* r_k^* + p_{k-2}^*} \overset{(2)}{=} \frac{p_k r_k^* + p_{k-1}}{q_k r_k^* + q_{k-1}} \overset{(1)}{=} \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}}.\end{aligned}$$

□

4.5 Median von Brüchen

Die Eigenschaft, die das folgende Lemma zeigt, wird im Abschnitt 6 benötigt, welches sich mit den Zwischenbrüchen beschäftigt.

Lemma 5. *Der Median* $\frac{a+c}{b+d}$ *der Brüche* $\frac{a}{b}$ *und* $\frac{c}{d}$ *liegt zwischen diesen beiden Brüchen, falls* $b, d > 0$.

Beweis. (Vgl. [2], Seite 14-15) O.B.d.A. sei $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, dann gilt: $ad > cb$. Es folgen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & \tfrac{a+c}{b+d} - \tfrac{a}{b} = \tfrac{(a+c)b-a(b+d)}{(b+d)b} = \tfrac{cb-ad}{(b+d)b} < 0 \\ \text{und} \quad & \tfrac{a+c}{b+d} - \tfrac{c}{d} = \tfrac{(a+c)d-c(b+d)}{(b+d)d} = \tfrac{ad-cb}{(b+d)d} > 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition der Terme $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{d}$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

und es folgt die Behauptung. □

4.6 Eindeutigkeit der Darstellung

Lemma 6. *Die Darstellung jeder Zahl* α *ist durch* $[a_0; a_1, ...]$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. (Vgl. [2], Seite 19) Der Beweis erfolgt ebenfalls durch Induktion. Angenommen es gibt für ein α zwei Darstellungen

$$\alpha = [a_0; a_1, ...] \quad \text{und} \quad \alpha = [a_0^*; a_1^*, ...]$$

mit $a_i \neq a_i^*$ für mindestens ein $i \in \mathbb{N}$.
Wegen $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ und $a_0^* = \lfloor \alpha \rfloor$ gilt, dass $a_1 = a_1^*$ (Vgl. Abschnitt 3).
Sei nun $k \in \mathbb{N}$, so dass $a_i = a_i^*$ für $i = 0, ..., k$. Dann gilt

$$\frac{p_k^*}{q_k^*} = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{und} \quad \frac{p_{k-1}^*}{q_{k-1}^*} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}. \tag{1}$$

Aufgrund des Lemmas 4 gilt

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{p_k^* r_{k+1}^* + p_{k-1}^*}{q_k^* r_{k+1}^* + q_{k-1}^*}.$$

Es ist $a_{k+1} = a_{k+1}^*$ zu zeigen. Wegen (1) ist $r_{k+1} = r_{k+1}^*$, da α ansonsten zwei unterschiedliche Werte annehmen müsste.
Aus $r_{k+1} = r_{k+1}^*$ folgt $a_{k+1} = a_{k+1}^*$, da $a_{k+1} = \lfloor r_{k+1} \rfloor = \lfloor r_{k+1}^* \rfloor = a_{k+1}^*$.
Damit folgt die Behauptung. □

5 Konvergenz

5.1 Beziehungen zwischen den Näherungsbrüchen

Für den Vergleich der Näherungsbrüche wird jeweils ihre Differenz betrachtet. Beide Näherungsbrüche werden zunächst auf einen Hauptnenner gebracht. Mit Hilfe von Lemma 2 ergibt sich direkt, ob die Differenz größer oder kleiner Null sein muss.

Satz 1. *Für alle $l,\ k \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen*

$$
\begin{array}{rl}
(ii) & \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < ... < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < ... \\
(i) & \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > ... > \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > ... \\
(iii) & \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}} > \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.
\end{array}
$$

Beweis. (Vgl. [7], Seite 5-6) Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Die Behauptung ergibt sich aus den folgenden Gleichungsketten

Zu (i):

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} - \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} = \frac{p_{2k}q_{2k-2} - p_{2k-2}q_{2k}}{q_{2k}q_{2k-2}} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{-((-1)^{2k-1}a_k)}{q_{2k}q_{2k-2}} > 0.$$

Zu (ii): Analog zu (i).

Zu (iii):

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k}} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{-(-1)^{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k}} > 0.$$

Somit gilt mit (ii)

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \cdots < \frac{p_1}{q_1}. \tag{1}$$

Daher gilt die Behauptung für $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_n}{q_n}$, $n \in \{1, 3, 5, ..., 2k+1\}$. Es bleibt zu zeigen, dass sie auch für alle ungeraden $n > 2k+1$ gilt. Man nehme das Gegenteil an

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \geq \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}} \quad \text{für} \quad 2l+1 = n > 2k+1. \tag{2}$$

Nach (i) gilt aber

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < ... < \frac{p_{2l-2}}{q_{2l-2}} < \frac{p_{2l}}{q_{2l}} \quad \text{für} \quad 2l+1 > 2k+1. \tag{3}$$

Mit (2) und (3) würde nun aber folgen

$$\frac{p_{2l}}{q_{2l}} > \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (1). Die Behauptung (iii) ist damit gezeigt. □

5.2 Eine untere Grenze für den Nenner der Näherungsbrüche

Satz 2. *Für beliebige $k \geq 2$ gilt: $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$.*

Beweis. (Vgl. [2], Seite 13-14) Der Beweis folgt per vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang erfolgt für $k = 2$ und $k = 3$, damit die Anwendung von Satz 1 im Induktionsschritt für gerade und

ungerade k getrennt erfolgen kann. Der Induktionsschluss erfolgt dann von $k-1$ und k nach $k+1$, je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist.
Induktionsanfang: $k = 2$ und $k = 3$. Es gilt

$$\begin{aligned} q_2 = a_2q_1 + q_0 &\overset{\text{Satz 1}}{\geq} 2q_0 = 2 > 2^{\frac{2-1}{2}} \\ q_3 = a_3q_2 + q_1 &\overset{\text{Satz 1}}{\geq} 2q_2 \geq 2 \cdot 2^{\frac{2-1}{2}} > 2^{\frac{3-1}{2}}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $q_{k-1} \geq 2^{\frac{k-2}{2}}$ und $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$

Induktionsschritt: $k-1 \quad \text{und} \quad k \to k+1$

Der Induktionsschritt wird zunächst für ungerade k gezeigt

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \overset{\text{Satz 1}}{\geq} 2 \cdot q_{k-1} \geq 2 \cdot 2^{\frac{k-2}{2}} = 2^{\frac{k}{2}}.$$

Für gerade k ergibt sich

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \overset{\text{Satz 1}}{\geq} 2 \cdot q_k \geq 2 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \geq 2^{\frac{k}{2}}.$$

So ist die Behauptung gezeigt. □

5.3 Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen

Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen konvergiert für $k \to \infty$ gegen Null.

Satz 3. *Es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = 0.$$

Beweis. Zur Abschätzung des Grenzwerts wird die Differenz der beiden Brüche auf einen Nenner gebracht. Durch Anwendung von Lemma 2 und Satz 2 ergibt sich dann ein Grenzwert, der für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren muss.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{p_kq_{k+1} - p_{k+1}q_k}{q_kq_{k+1}} \right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{q_kq_{k+1}} \overset{\text{Satz 2}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}} \\ &= \lim_{k\to\infty} (\frac{1}{2})^{k+\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert, da es eine geometrische Reihe ist mit einem potenzierten Wert kleiner als Eins. □

5.4 Darstellung der Näherungsbrüche nach Größe

Satz 4. *Es gilt die folgende Relation*

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < ... < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < ... < \alpha < ... < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < ... < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Beweis. Der Satz folgt direkt aus den Sätzen 1 und 3. □

6 Zwischenbrüche

Dieser Abschnitt bezieht sich auf [2], Seite 14. Man bezeichnet

$$\frac{p_{k-2} + lp_{k-1}}{q_{k-2} + lq_{k-1}} \quad , \quad l = 1, ..., a_k - 1,$$

als Zwischenbrüche von $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$.

Die Zwischenbrüche ergeben eine zunehmende oder eine abnehmende Folge. Sie ergeben sich als Median des vorherigen Zwischenbruchs (für $l = 1$ aus $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$) und dem Bruch $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ (Vgl. Lemma 5). Da laut Satz 1 $\frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} > \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ und $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ gilt, ergibt sich, dass die Folge der Zwischenbrüche von $i = 1, .., a_k - 1$ bei ungeraden k abnimmt und bei geraden k zunimmt. Außerdem sind die Zwischenbrüche der zugehörigen Näherungsbrüche entweder größer oder kleiner als α.

Des Weiteren sind $\frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}$ und $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ auf verschiedenen Seiten von α, da $\frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}$ der erste Zwischenbruch von $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$ oder ggf. gleich $\frac{p_k}{q_k}$ selbst ist (falls $a_k = 1$) und damit laut Satz 4 auf verschiedenen Seiten von α liegt.

Die genannten Eigenschaften ermöglichen ein Verfahren für die Bestimmung des nächsten Näherungsbruchs, ohne Kenntnis des Wertes des dazu gehörigen a_k. Der Wert von α muss hingegen bekannt sein. Um den nächsten Näherungsbruch zu finden, werden die Zwischenbrüche nacheinander gebildet. Dies geschieht so lange, bis der letzte Kettenbruch erreicht ist, der noch auf der gleichen Seite von α liegt, wie sein Vorgänger. Dieser letzte Zwischenbruch ist dann der nächste gesuchte Näherungsbruch. Für die Gültigkeit dieses Verfahrens bleibt nach den obigen Überlegungen zu zeigen, dass der Zwischenbruch, der nach dem Erreichen des Näherungsbruchs berechnet wird, auf der anderen Seite von α liegt. Dies gilt aber aufgrund der folgenden Gleichungen

$$\frac{p_{k-2} + (a_k + 1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k + 1)q_{k-1}} = \frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1} + p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1} + q_{k-1}} \overset{\text{Lemma 1}}{=} \frac{p_{k-1} + p_k}{q_{k-1} + q_k}.$$

Damit entspricht der dann folgende Zwischenbruch dem Median von $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_k}{q_k}$. Dieser Median liegt auf der gleichen Seite von α, wie $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, da es ist der erste Zwischenbruch von $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ und $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ ist. Aufgrund von Satz 4 liegen nun die Brüche $\frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}}$ und $\frac{p_{k-2}+(a_k+1)p_{k-1}}{q_{k-2}+(a_k+1)q_{k-1}}$ auf unterschiedlichen Seiten von α. Das beschriebene Verfahren ist also zielführend.

7 Abschätzung der Güte der Approximation

Im Folgenden werden einige Sätze bewiesen, die den Abstand des k-ten Näherungsbruchs mit der irrationalen Zahl α abschätzen.

Satz 5. *Es gilt die folgende Abschätzung*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}.$$

Beweis. (Vgl. [8], Seite 3) Aufgrund der Lemmata 1, 2 und 4 folgt

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| &\overset{\text{Lemma 4}}{=} \left|\frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{(p_k r_{k+1} + p_{k-1})q_k - (q_k r_{k+1} + q_{k-1})p_k}{q_k(q_k r_{k+1} + q_{k-1})}\right| \\
&= \left|\frac{p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}}{q_k(q_k r_{k+1} + q_{k-1})}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \left|\frac{(-1)^k}{(r_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k})q_k^2}\right| \\
&\overset{(r_{k+1}>1)}{<} \frac{1}{q_k^2} \quad \left(\overset{\text{Lemma 1}}{<} \frac{1}{q_k q_{k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung: Der Satz 5 lässt sich nicht verschärfen (Vgl. [2], Seite 31). Wähle dazu $\alpha_k = [0; k, 1, k, ...]$. Dann gilt

$$\frac{p_1}{q_1} = 0 + \frac{1}{k}, \quad \frac{p_2}{q_2} = 0 + \frac{1}{k+1}, \quad \frac{p_3}{q_3} = 0 + \frac{1}{k + \frac{1}{1+\frac{1}{k}}} = \frac{k+1}{k(k+2)}.$$

Und damit

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| &\overset{\text{Satz 4}}{>} \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{k+1}{(k+2)k} - \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{k+1-(k+2)}{(k+2)k}\right| \\
&= \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{q_1^2 + 2k} = \frac{1}{q_1^2(1+\frac{2}{k})}.
\end{aligned}$$

Für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ und $k(\varepsilon)$ mit

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{k(\varepsilon)}} > 1 - \varepsilon.$$

folgt

$$\left|\alpha_{k(\varepsilon)} - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

Da dies für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, lässt sich die Ungleichung für $\alpha_{k(\varepsilon)}$ aus Satz 5 nicht verschärfen. Eine weitere Verschärfung gelingt jedoch unter der Einschränkung, dass die Ungleichung nicht mehr für alle k gilt, so wie dies in dem vorherigen Satz der Fall war. Dies wird in den Sätzen 7 und 8

gezeigt.
Der folgende Satz gibt eine Abschätzung nach oben für den Abstand zwischen α und dem Näherungsbruch $\frac{p_k}{q_k}$.

Satz 6. *Es gilt für $k \geq 0$*

$$\textit{Es gilt: } \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)}.$$

Beweis. (Vgl. [2], Seite 16) Aus dem Abschnitt über die Zwischenbrüche folgt

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}} < \alpha \quad \text{oder:} \quad \frac{p_k}{q_k} > \frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}} > \alpha. \tag{1}$$

Das „oder“ ist in diesem Fall ausschließend. Aufgrund der genannten Eigenschaft (1) folgt

$$\begin{aligned} \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| &\overset{(1)}{>} \left|\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{(p_k+p_{k+1})q_k - p_k(q_k+q_{k+1})}{(q_k+q_{k+1})q_k}\right| \\ &= \left|\frac{p_kq_k - p_kq_k + p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1}}{(q_k+q_{k+1})q_k}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{(q_k+q_{k+1})q_k}. \end{aligned}$$

Somit ist die Abschätzung gezeigt. □

Bemerkung: Es gilt auch $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(a_{k+1}+1+\frac{q_{k-1}}{q_k})}$, da

$$(q_k+q_{k+1})q_k \overset{\text{Lemma 1}}{=} (q_k + a_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k = q_k^2(a_{k+1}+1+\frac{q_{k-1}}{q_k}).$$

Der folgende Satz bietet eine weitere Abschätzung, die aber nicht für alle Indizes k gilt, sondern nur für mindestens ein k aus zwei nacheinander folgenden Zahlen.

Satz 7. *Für ein k aus $\{n, n-1\}$ gilt* $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2}$.

Beweis. (Vgl. [2], Seite 32) Aufgrund von Lemma 2 und

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{q_kq_{k-1}} &< \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2} \\ \Leftrightarrow \quad q_kq_{k-1} &< \frac{q_{k-1}^2}{2} + \frac{q_k^2}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 0 &< (q_k - q_{k-1})^2 \end{aligned}$$

gilt folgender Zusammenhang

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_kq_{k-1} - q_kp_{k-1}}{q_kq_{k-1}}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{q_kq_{k-1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

Aus dem Zusammenhang folgt schon die Behauptung. Denn angenommen, für beide Terme würde gelten: $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2}$ für $n \in \{k, k+1\}$. Dann würde folgen

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2},$$

im Widerpruch zu dem oben gezeigten Zusammenhang. □

Der folgende Satz schätzt den Abstand zwischen α und dem k-ten Näherungsbruch noch besser ab. Allerdings muss diese Abschätzung nur für ein Indize aus drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gelten.

Satz 8 (Approximationssatz von Hurwitz)**.** *Für ein k aus $\{n, n-1, n-2\}$ gilt*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}.$$

Beweis. (Vgl. [2], Seite 33-34) Angenommen, die Ungleichung gilt für drei aufeinander folgende Indizes nicht

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2} \quad \text{für:} \quad k \in \{n-2, n-1, n\}.$$

Dann muss gelten $\left(\text{Vgl. Beweis von Satz 5: } \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{(r_{k+1}+\frac{q_{k-1}}{q_k})q_k^2}\right)$

$$r_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} \leq \sqrt{5} \quad \text{für} \quad k \in \{n-2, n-1, n\}.$$

Es herrscht folgender Zusammenhang

$$r_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}}.$$

Diese Gleichung wird mit der folgenden Umformung gezeigt

$$\begin{aligned} r_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{1}{[a_{k+1}; a_{k+2}, ...]} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}} \overset{\text{Lemma 3}}{=} a_k + \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1]} \\ &\overset{\text{Lemma 3}}{=} \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}}. \end{aligned}$$

Dann gilt aufgrund der Annahme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \leq \sqrt{5} \\ \text{und} \quad &r_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} \leq \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad r_{k+1} \leq \sqrt{5} - \frac{q_{k-1}}{q_k}. \end{aligned}$$

Mit dem Einsetzen von r_{k+1} aus der zweiten Ungleichung in die erste Ungleichung ergibt sich nach einigen Unformungen $\mathbf{\frac{q_{k-1}}{q_k} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}-\frac{q_{k-1}}{q_k}} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \leq \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}}(\sqrt{5}-\frac{q_{k-1}}{q_k}) \leq \sqrt{5}(\sqrt{5}-\frac{q_{k-1}}{q_k}) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq 5 - \sqrt{5}(\frac{q_{k-1}}{q_k} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}}). \end{aligned}$$

Da $\frac{q_{k-1}}{q_k} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \in \mathbb{Q}$, kann ihr Wert nicht $\sqrt{5}$ sein und es kann keine Gleichheit vorliegen. Es muss also für $s := \frac{q_{k-1}}{q_k}$ gelten

$$\begin{aligned} & 0 < 5 - \sqrt{5}(s + \frac{1}{s}) \\ \Leftrightarrow\ & 0 > -\sqrt{5}s + s^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4} > (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{2}s + s^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4} > (\frac{\sqrt{5}}{2} - s)^2 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2} - s \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{\frac{q_{k-1}}{q_k} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \end{aligned}$$

Analog folgt $\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Diese beiden Ungleichungen werden zu einem Widerspruch geführt, indem $\frac{q_k}{q_{k-1}}$ und $\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}$ in einem Zusammenhang zu dem Koeffizienten a_k gesetzt werden

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} - \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \overset{\text{Lemma 3}}{=} [a_k; a_{k-1}, ..., a_1] - \frac{1}{[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1]} = a_k.$$

Daraus folgt aufgrund der gezeigten Ungleichungen $\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{q_{k-1}}{q_k} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ein Widerspruch

$$a_k = \frac{q_k}{q_{k-1}} - \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} < \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

da in dieser Arbeit alle a_k größer oder gleich eins sein müssen. □

Bemerkung: (Vgl. [2], Seite 35-36) Für eine beliebige Konstante $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ kann es beliebig viele k geben, für die gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}.$$

Dies gilt für den goldenen Schnitt

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, ...] = [1; \overline{1}].$$

Für diese Zahl ist $r_k = \alpha$ für $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\alpha \overset{\text{Lemma 4}}{=} \frac{p_k r_k + p_{k-1}}{q_k r_k + q_{k-1}} \overset{(r_k=\alpha)}{=} \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}}$$

und es folgt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{p_k\alpha + p_{k-1}}{q_k\alpha + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{q_k^2(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k})}.$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1; 1, .., 1]$ gegen α konvergiert für k gegen unendlich, gibt es ein Folge ε_k mit

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k \quad (\varepsilon_k \to 0 \text{ für } k \to \infty).$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k)} = \frac{1}{q_k^2(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k)} = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \varepsilon_k)}.$$

Wenn nun $\frac{1}{\sqrt{5}} > c$ ist, dann gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \varepsilon_k)} > \frac{c}{q_k^2} \quad \text{für große} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das letzte Ungleichungszeichen gilt, da $\frac{1}{\sqrt{5}+\varepsilon_k} > c$ für große k immer erfüllt ist.

Bemerkung: (Vgl. [2], Seite 37) Der letzte Satz und die letzte Bemerkung ergeben, dass $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ für jedes beliebige α und für unendlich viele verschiedene p und q erfüllt ist, falls $c \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Wenn aber $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ist, dann gibt es irrationale Zahlen α, so dass die Ungleichung nur für endlich viele p und q erfüllt ist.

Der nächste Satz zeigt, dass sich für jede Funktion ein α finden lässt, so dass der Abstand von α zu dem Näherungsbruch kleiner als der passende Funktionswert ist. Der Beweis stammt aus [2], Seite 37-38 und ist recht kurz.

Satz 9. *Für jede Funktion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \psi(q_k)$ für unendlich viele ganze Zahlen k gilt.*

Beweis. Wähle für alle $k \in \mathbb{N}$ $a_{k+1} \geq \frac{1}{q_k^2 \psi(q_k)}$, dann gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \overset{\text{Satz 5}}{<} \frac{1}{q_k q_{k+1}} \overset{\text{Lemma 1}}{=} \frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1}q_k^2} < \psi(q_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für ein so gewähltes $\alpha = [a_0; a_1, ...]$ die Behauptung. □

8 Quadratische Irrationalitäten

Erfüllt α die Gleichung $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ mit ganzen Zahlen $A \neq 0$, B und C, so wird α quadratische Irrationalität genannt. Für diese gibt es eine charakteristische Eigenschaft, welche in dem folgenden Satz bewiesen wird (Vgl. [2], Seite 51-54). Der Beweis wurde mit Argumenten erweitert.

Satz 10. *Die Kettenbruchentwicklung von α ist periodisch genau dann, wenn α eine quadratische Irrationalität ist.*

Beweis.

„⇒“ Sei zunächst $\alpha = [a_0; a_1, ...]$ periodisch mit der Periodenlänge $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_i = a_{i+k}$ für alle $i \geq i_0$. Desweiteren gilt $r_i = r_{i+k}$ $\forall i \geq i_0$. Damit folgt aufgrund von Lemma 2

$$\begin{aligned} & \alpha = \tfrac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} \qquad \text{und} \quad \alpha = \frac{p_{k+i-1}r_{k+i} + p_{k+i-2}}{q_{k+i-1}r_{k+i} + q_{k+i-2}} \\ \overset{(r_i = r_{i+k})}{\Rightarrow} \quad & \tfrac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+i-1}r_k + p_{k+i-2}}{q_{k+i-1}r_k + q_{k+i-2}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nun zu einer quadratischen Gleichung mit der Unbekannten α umformen

$$\begin{aligned} & (p_{k-1}r_k + p_{k-2})(q_{k+i-1}r_k + q_{k+i-2}) = (p_{k+i-1}r_k + p_{k+i-2})(q_{k-1}r_k + q_{k-2}) \\ \Leftrightarrow \quad & (p_{k-1}q_{k+i-1} - p_{k+i-1}q_{k-1})r_k^2 + (p_{k-1}q_{k+i-2} + p_{k-2}q_{k+i-1} - p_{k+i-2}q_{k-1} - p_{k+i-1}q_{k-2})r_k \\ & + (p_{k-2}q_{k+i-2} - p_{k+i-2}q_{k-2}) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Angenommen, der Term vor r_k^2 ist gleich Null, dann würde gelten

$$\begin{aligned} p_{k-1}q_{k+i-1} - p_{k+i-1}q_{k-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \tfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} &= \frac{p_{k+i-1}}{q_{k+i-1}}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt einen Widerspruch zu Satz 4 da. Aus diesem Grund ist der Faktor vor r_k ungleich null. Außerdem sind alle Koeffizienten ganzzahlig, da p_k und q_k aus $\mathbb{Z}$ für alle k. Insgesamt genügt r_k einer Gleichung $Ar_k^2 + Br_k + C = 0$ mit $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$. Aufgrund von (1) ist dann auch α eine quadratische Irrationalität.

„⇐“ Genügt nun α einer Gleichung $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$. In diese Gleichung wird

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}$$

eingesetzt. Dadurch ergibt sich eine quadratische Gleichung in r_k.

$$\begin{aligned}
& A\left(\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}\right)^2 + B\left(\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}\right) + C = 0 \\
\Leftrightarrow\ & A(p_{k-1}r_k + p_{k-2})^2 + B(p_{k-1}r_k + p_{k-2})(q_{k-1}r_k + q_{k-2}) + C(q_{k-1}r_k + q_{k-2})^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_k r_k^2 + B_k r_k + C_k
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_k &= Ap_{k-1}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2 \\
B_k &= 2Ap_{k-1}p_{k-2} + B(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2Cq_{k-1}q_{k-2} \\
C_k &= Ap_{k-2}^2 + Bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Koeffizienten beschränkt sind. Das bedeutet, dass die ganzen Zahlen a_k, b_k und c_k nur endlich viele verschiedene Werte annehmen können. Falls dies gilt, folgt aus der Gleichung $a_k r_k^2 + b_k r_k + c_k = 0$, dass auch r_k nur endlich viele Werte annehmen kann. Somit gilt dann $r_i = r_{i+k}$ für geeignet gewählte i und k. Damit ist die zugehörige Kettenbruchentwicklung periodisch, was zu zeigen war.
Es gilt laut Satz 5: $\left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{q_{k-1}^2}$. Deshalb lässt sich ein δ finden mit $|\delta| < 1$ und

$$\begin{aligned}
& \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{|\delta|}{q_{k-1}^2} \\
\Leftrightarrow\ & |q_{k-1}\alpha - p_{k-1}| = \frac{|\delta|}{q_{k-1}} \\
\Rightarrow\ & p_{k-1} = \alpha q_{k-1} + \frac{\delta}{q_{k-1}}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (3) wird in(2) in die Gleichung für a_k eingesetzt

$$\begin{aligned}
A_k &\overset{(1)\&(2)}{=} A(q_{k-1}\alpha + \frac{\delta}{q_{k-1}})^2 + B(q_{k-1}\alpha + \frac{\delta}{q_{k-1}})q_{k-1} + Cq_{k-1}^2 \\
&= q_{k-1}^2 A\alpha^2 + 2A\alpha\delta + A\frac{\delta^2}{q_{k-1}^2} + B\alpha q_{k-1}^2 + B\delta + Cq_{k-1}^2 \\
&= q_{k-1}^2 \underbrace{(A\alpha^2 + B\alpha + C)}_{=0 \text{ lt. Vor.}} + A\frac{\delta^2}{q_{k-1}^2} + B\delta + 2A\alpha\delta.
\end{aligned}$$

Da $|\delta| < 1$ gilt, folgt daraus

$$|A_k| = \left|A\frac{\delta^2}{q_{k-1}^2} + B\delta + 2A\alpha\delta\right| < |A| + |B| + |2A\alpha|\,.$$

Es gilt auch $C_k < |A| + |B| + |2A\alpha|$, da $A_k = C_{k-1}$. Aus diesem Grund sind A_k und C_k beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass B_k beschränkt ist. Dies folgt aus der Gleichheit der beiden Diskriminanten

$B^2 - 4AC$ und $B_k^2 - 4A_kC_k$, da A_k und C_k beschränkt sind.

$$\begin{aligned}
B_k^2 - 4A_kC_k \overset{(2)}{=} \quad & (2Ap_{k-1}p_{k-2} + B(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2Cq_{k-1}q_{k-2})^2 \\
& -4((Ap_{k-1}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2)(Ap_{k-2}^2 + Bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2) \\
= \quad & 4A^2p_{k-1}^2p_{k-1}^2 + 4ABp_{k-1}p_{k-2}(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) \\
& +8ACp_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + B^2(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1})^2 \\
& +4BC(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1})q_{k-1}q_{k-2} + 4C^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 4A^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 \\
& -4ABp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} - 4ACp_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 4ABp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1} \\
& -4B^2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} - 4BCp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 - 4ACp_{k-2}^2q_{k-1}^2 \\
& -4BCp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2} - 4C^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2 \\
= \quad & B^2(p_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}^2q_{k-1}^2) \\
& -4AC(p_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}^2q_{k-1}^2) \\
= \quad & B^2(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})^2 - 4AC(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})^2 \\
\overset{\text{Lemma 2}}{=} \quad & B^2 - 4AC.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der vorherigen Überlegungen folgt die Behauptung. □

9 Schlecht approximierbare Zahlen

Im Folgenden wird die Maßtheorie auf die Kettenbrüche angewendet. Es zeigt sich, dass die schlecht approximierbaren Zahlen das Maß Null haben. Schlecht approximierbar sind die Zahlen, deren Kettenbruchelemente $a_0, a_1, a_2, ...$ beschränkt sind. Grundlegende Erkenntnisse aus der Maßtheorie werden als bekannt vorausgesetzt, da durch eine solche Einführung der Umfang dieser Arbeit überschritten werden würde.

Satz 11. *Kettenbrüche, deren Elemente $a_0, a_1, a_2, ...$ beschränkt sind, haben auf dem Intervall (0,1) das Maß Null.*

Beweis. Der Beweis folgt [8], Seite 13 bis 14. Zunächst werden die folgenden Mengen definiert

$$\begin{aligned}
A_N &:= \{[a_1, a_2, ...] : a_k < N \ , \forall\ k \in \mathbb{N}\} \ , \\
A_N^n &:= \{[a_1, a_2, ...] : a_k < N, \ \forall\ k \leq n, k \in \mathbb{N}\} \ , \\
A &:= \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N.
\end{aligned}$$

Da in der Menge A_N^n nur die ersten n Koeffizienten die Eigenschaft $a_k < N$ erfüllen, gilt $A_N \subset A_N^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. In der Menge A liegen alle irrationalen Zahlen, deren Kettenbrüche ausschließlich aus beschränkten Koeffizienten bestehen. Für diese Mengen soll nun gezeigt werden, dass sie das Lebesque-Maß Null hat, also $\mu\,(A) = 0$.

Aufgrund der Ungleichung

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N\right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \mu(A_N)$$

genügt es zu zeigen, dass $\mu(A_N) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.
Dazu wird die folgende Eigenschaft betrachtet

$$A_N^{n+1} = \bigcup_{\substack{a_1,...,a_{n+1} \\ a_k<N}} I(a_1,...,a_{n+1}) = \bigcup_{\substack{a_1,...,a_n \\ a_k<N}} \bigcup_{l<N} I(a_1,...,a_n,l), \tag{1}$$

wobei $I(a_1,...,a_n) := \{[b_1,...,b_n,...] : a_k = b_k \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$.

Zunächst soll das Maß für die Menge $I(a_1,...,a_n)$ bestimmt werden. Dafür wird ausgenutzt, dass

jeder Kettenbruch aus der Menge $I(a_1,...,a_n)$ zwischen den Brüchen $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}$ liegt.

Diese Eigenschaft folgt aus dem Lemma 2: $\alpha = \frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}}$. Für alle $\alpha \in I(a_1,...,a_n)$ ha´ben p_n, p_{n-1}, q_n und q_{n-1} den gleichen Wert, da sie nur von den a_k mit $1 \leq k \leq n$ abhängig sind. Alleine das r_{n+1} ändert sich in Abhängigkeit von α, wobei stets $1 < r_{n+1} < \infty$ gilt. Außerdem nimmt r_{n+1} alle beliebigen Werte zwischen diesen Grenzen an, da $r_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$. Somit ergibt sich

$$\mu(I(a_1,...,a_n)) = \left|\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(p_n+p_{n-1})q_n - (q_n+q_{n-1})p_n}{(q_n+q_{n-1})q_n}\right| \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{q_n^2(1+\frac{q_{n-1}}{q_n})}. \tag{2}$$

Des Weiteren gilt für alle $\alpha \in I(a_1,...,a_n,l)$ $\alpha = \frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}}$ mit $r_{n+1} = [l, a_{n+2}, ...] = l + \frac{1}{r_{n+2}}$. Aus diesem Grund liegt r_{n+1} zwischen 1 und N, da $1 \leq l < N$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{l<N} I(a_1,...,a_n,l)\right) &= \left|\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}} - \frac{p_nN+p_{n-1}}{q_nN+q_{n-1}}\right| \\
&= \left|\frac{(p_n+p_{n-1})(q_nN+q_{n-1}) - (q_n+q_{n-1})(p_nN+p_{n-1})}{(q_n+q_{n-1})(q_nN+q_{n-1})}\right| \\
&\overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{N-1}{q_n^2(1+\frac{q_{n-1}}{q_n})(N+\frac{q_{n-1}}{q_n})} \leq \frac{N-1}{q_n^2(1+\frac{q_{n-1}}{q_n})N} \overset{(2)}{=} \frac{N-1}{N}\ \mu(I(a_1,...,a_n)) \\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)\mu(I(a_1,...,a_n)),
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei $a_1,...,a_n < N$ ist.
Nun wird das Maß der Menge A_N^{n+1} mit Hilfe des Maßes von A_N^n abgeschätzt

$$\begin{aligned}
\mu(A_N^{n+1}) &\overset{(1)}{=} \mu(\dot{\bigcup_{\substack{a_1,...,a_n \\ a_k<N}}} \bigcup_{l<N} I(a_1,...,a_n,l)) = \sum_{\substack{a_1,...,a_n \\ a_k<N}} \mu(\bigcup_{l<N} I(a_1,...,a_n,l)) \\
&\overset{(3)}{\leq} \sum_{\substack{a_1,...,a_n \\ a_k<N}} \left(1-\frac{1}{N}\right)\mu(I(a_1,...,a_n)) = \left(1-\frac{1}{N}\right)\mu(A_N^n).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\mu(A_N^{n+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mu(A_N^n)$ und damit folgende Ungleichungskette

$$\mu(A_N^{n+1}) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mu(A_N^n) \leq ... \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \mu(A_N^1).$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_N^n) = 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

und deshalb

$$\mu(A_N) = 0 \;\forall \quad N \;\in\; \mathbb{N},$$

da $A_N \subseteq A_N^n \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. Damit folgt aufgrund der vorherigen Überlegungen die Behauptung. □

Der folgende Satz gibt an, wie groß das Wachstum der a_n mindestens sein muss, damit α die Möglichkeit hat, zu einem positiven Lebesgue-Maß beizusteuern (Vgl. [8], Seite 15).

Satz 12. *Sei $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(n)}$ divergiert, dann gilt*

$$\mu(A_\psi) = 0.$$

wobei $A_\psi := \{\alpha = [a_1, ...] : a_n < \psi(n)$ für unendlich viele $n\}$

Beweis. Der Beweis wird ähnlich geführt, wie der Beweis zum Satz 11, er lässt sich in [8] auf Seite 15 finden. □

10 Ergodentheorie

Im Folgenden werden einige wichtige Begriffe aus der Ergodentheorie eingeführt (Vgl. [5]). Aufbauend auf mehreren Definitionen wird der Teil des Ergodensatzes formuliert, welcher für die Anwendung des Ergodensatzes in 10.2 und 10.3 benötigt wird. Diese Theorie wird auf die Gauß-Abbildung angewendet, die in einem engen Zusammenhang zu den Kettenbrüchen steht. Die Darstellung und die Wirkung der Gauß-Abbildung erfolgt in dem nächsten Unterabschnitt. einer Eine ergodische Abbildung hat eine ‚chaotische' Eigenschaft. Bei ergodischen Abbildungen ist es nicht möglich, die Untersuchung von Eigenschaften der Abbildung auf der Definitions- und Zielmenge $\mathfrak{A}$ getrennt auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs und deren Komplement durchzuführen. Dies gilt, sofern diese Teilmenge nicht das Maß Null hat.

Zunächst wird eine Definition für maßtreue Abbildungen gegeben, da dies eine Voraussetzung für die Ergodizität ist (Vgl. [5], Seite 96).

Definition 1. *(Vgl. [5], Seite 69, 118) Eine messbare Abbildung $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt maßtreu, bzgl. μ, wenn für jede messbare Menge A*

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$

gilt, wobei T messbar ist, falls $T^{-1}(A) := \{x : T(x) \in A\} \in \mathfrak{F}$ gilt und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$ ein Maßraum ist ($\mathfrak{F}$ sei eine σ-Algebra der Grundmenge $\mathfrak{A}$)

Falls T maßtreu und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$ ein Maßraum ist, so wird $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu, T)$ ein dynamisches System genannt.

Nun folgt die Definition für eine ergodische Abbildung (Vgl. [5], Seite 96)

Definition 2. *Eine maßtreue Abbildung $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt ergodisch bzgl. μ, wenn für jede messbare Menge A mit $T^{-1}A = A$ entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$ gilt.*

Es lässt sich, mit Hilfe des folgenden Satzes zeigen, dass eine Abbildung $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ maßtreu ist. Der Beweis lässt sich in [5] auf Seite 83 bis 85 finden.

Satz 13. *Sei C die monotone Klasse eines Maßraumes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$ und T eine messbare Abbildung $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Falls für alle $J \in C$*

$$(i)\ T^{-1}(J) \text{ ist eine messbare Menge}$$
$$(ii)\ \mu(T^{-1}(J)) = T(J)$$

gilt, dann ist T eine maßtreue Abbildung.

Dieser Satz wird im Abschnitt 10.1 benötigt, um zu zeigen, dass die Gauß-Abbildung maßtreu ist. In dem Fall wird $\mathfrak{A} = (0, 1)$ gewählt. Zunächst wird mit folgender noch fehlender Definition der Begriff der monotonen Klasse eingeführt (Vgl. [5], Seite 39).

Definition 3. *Eine monotone Klasse C eines Maßraumes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

$$(i)\ C \neq \emptyset$$
$$(ii)\ \forall c_1, c_2 \in C gilt c_1 \cap c_2 \in C$$
$$(iii)\ \forall c_1, c_2 gilt c_1 \setminus c_2 = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} E_k,\ wobei\ E_k \in C$$
$$(iv)\ \mu(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,\ J_k \in C \right\}.$$

Wenn Eigenschaften für messbare Mengen gezeigt werden sollen, dann werden diese oft zunächst für monotone Klassen gezeigt. Durch das approximative Argument (iv) der obigen Definition kann diese Eigenschaft dann auf alle messbaren Mengen erweitert werden. Dieses Prinzip wurde in Satz 13 benutzt.

Der Ergodensatz wurde zum ersten Mal im Jahre 1931 von J. von Neumann bewiesen. G. D. Birkhoff bewies später den Satz in einer stärkeren Form. In dieser Arbeit wird nicht der gesamte Satz von Birkhoff dargestellt. Dieser Satz bietet in seiner einfachen Form eine asymptotische Gleichheit zwischen der Flächen- und der Zeitausdehnung. Das bedeutet, dass die durchschnittliche Anzahl der Werte, die unter der n-fachen Anwendung von T auf einen beliebigen Punkt $\alpha \in \mathfrak{A}$ innerhalb dieser Fläche treffen, asymptotisch gleich zu dem Maß der Fläche ist, falls T ergodisch ist (Vgl. [5], Seite 175-176).

Satz 14. *Sei T eine maßtreue Abbildung auf $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$. T ist ergodisch genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^n(\alpha)) = \mu(A).$$

Die Identität kann durch eine beliebige integrierbare Funktion ersetzt werden. Dann wird $\mu(A)$ durch das Integral der Funktion ersetzt (Vgl. [5], Seite 176). Es wird eine allgemeinere Behauptung dargestellt, die als Voraussetzung nutzt, dass die Abbildung ergodisch sein muss. Es gibt auch eine ähnliche Aussage für Abbildungen, die nicht ergodisch sind.

Nun wird der Teil des Satzes von G. D. Birkhoff, der für die Anwendungen der folgenden Abschnitte benötigt wird, dargestellt. Ein Beweis wird in [5] auf den Seiten 182 bis 183 geführt.

Satz 15. *Sei T eine maßtreue, ergodische Transformation auf $(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$ und $f \in L(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mu)$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} f d\mu \quad \textit{fast überall.}$$

10.1 Die Gauß-Abbildung

Die Gauß-Abbildung $T : [0,1) \to [0,1)$ ist definiert als

$$T(\alpha) := \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \quad \text{wenn} \quad \alpha \neq 0 \ , \ T(0) = 0.$$

Diese Transformation ist nicht unter dem normalen Lebesque-Maß ergodisch. Es ist aber unter dem im Folgenden definierten Gauß-Maß ergodisch (Beweis: [4], Seite 5).

Definition 4. *(Vgl. [5], Seite 152) Das Gauß-Maß G ist definiert für alle messbaren Mengen $A \subseteq [0,1]$ als*

$$G(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+\alpha} d\alpha.$$

Dieses Gauß-Maß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1)$. Es ist zu zeigen, dass das Gauß-Maß normiert, $G(\emptyset) = 0$ und σ-additiv ist, damit in 10.2 und 10.3 der Ergodensatz auf T angewendet werden kann.

Beweis. Es wird zunächst $G(\emptyset) = 0$ gezeigt

$$G(\emptyset) = \frac{1}{\log 2} \int_{\emptyset} \frac{1}{1+\alpha} d\alpha = 0.$$

Weiterhin ist es normiert, da

$$G([0,1)) = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha}d\alpha = \frac{1}{\log 2}\left[\log(1+\alpha)\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}\left[\log(2)-\log(1)\right] = 1.$$

Außerdem ist es σ-additiv, da

$$G(\dot{\bigcup_{i\geq 1}} A_i) = \frac{1}{\log 2}\int_{\dot{\bigcup}_{i\geq 1} A_i} \frac{1}{1+\alpha}d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\int_{A_i}\frac{1}{1+\alpha}d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} G(A_i).$$

$\square$

Als nächstes wird gezeigt, dass die Gauß-Abbildung messbar ist.

Beweis. Zunächst wird die Gauß-Abbildung als eine stückweise stetige Funktion dargestellt. Es gilt der folgende Zusammenhang für alle n aus $\mathbb{N}$ (Vgl. [5], Seite 152)

$$\frac{1}{n+1} < \alpha < \frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad n < \frac{1}{\alpha} < n+1 \quad\Rightarrow\quad \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor = n \quad\Rightarrow\quad T(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - n.$$

Die Unstetigkeitsstellen sind die Stellen $\alpha = \frac{1}{n}\ \forall\ n$. Es bleibt zu zeigen, dass eine Funktion mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen messbar ist. Seien also $s_k,\ k \in \mathbb{N}$ die (nach Größe geordneten) Unstetigkeitsstellen, d.h. $k < j \Rightarrow s_k < s_j$ sowie $A \subseteq (0,1)$ eine beliebige messbare Menge. Es muss gezeigt werden, dass $T^{-1}(A)$ messbar ist. Es gilt

$$T^{-1}(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(T^{-1}(A)\cap(s_k,s_{k+1})\right) \quad\cup\quad \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(T^{-1}(A)\cap\{s_k\}\right).$$

Der rechte Menge ist eine Nullmenge. Für die linke Menge gilt:

$$T^{-1}(A)\cap(s_k,s_{k+1}) = T^{-1}(A)\mid_{(s_k,s_{k+1})}.$$

ist $T^{-1}(A)\mid_{(s_k,s_{k+1})}$ messbar, da die Gauß-Abbildung auf diesem Intervall stetig ist. Damit ist auch die Gauß-Abbildung selbst messbar, da der rechte Term $\bigcup_{k=1}^{\infty}(T^{-1}(A)\cap(s_k,s_{k+1}))$ als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen messbar ist. $\square$

Nun wird gezeigt, dass die Gauß-Abbildung maßtreu ist. Der Beweis folgt dem Beweis, der in [5] auf Seite 153 aufgeführt wird, jedoch wurden einige Argumentationen und Zusammenhänge hinzugefügt.

Beweis. Aufgrund von Satz 13 reicht es aus, $G(T^{-1}(a,b)) = G(a,b)\forall 0 < a < b < 1$ zu zeigen, da die offenen Intervalle eine monotone Klasse für den Maßraum $((0,1), B(0,1), G)$ bilden, wobei $B(0,1)$ die borelsche σ-Algebra zu $(0,1)$ ist. Dafür reicht es wiederum aus, $G(T^{-1}(0,t)) = G(0,t)\forall t \in (0,1)$ zu zeigen. Dies reicht, da dieser Fall auf jedes beliebige Intervall (a,b) zurückgeführt werden kann.

Es gilt

$$\begin{aligned}
T^{-1}((a,b)) &= T^{-1}((0,b)\setminus(0,a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{n+b},\tfrac{1}{n+a}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{n+a},\tfrac{1}{n}\right)\setminus\left[\tfrac{1}{n+b},\tfrac{1}{n}\right) \\
\Rightarrow\ G(T^{-1}(a,b)) &= G(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n+a}\right)\setminus\left[\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n+b}\right)) = G(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{n+a},\tfrac{1}{n}\right)) - G(\left[\tfrac{1}{n+b},\tfrac{1}{n}\right)) \\
&= G(T^{-1}[0,a)) - G(T^{-1}[0,b)).
\end{aligned}$$

Nun wird $G(T^{-1}(0,t)) = G(0,t) \quad \forall \ t \in \ (0,1)$ gezeigt. Wegen

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\alpha}d\alpha = \Big[\log(1+\alpha)\Big]_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}} = \log\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+t}}\right) = \log\left(\frac{n+t}{n}\cdot\frac{n+1}{n+t+1}\right) \\
= \log\left(1+\frac{t}{n}\right) - \log\left(1+\frac{t}{n+1}\right) = \int_{\frac{t}{n+1}}^{\frac{t}{n}} \frac{1}{1+\alpha}d\alpha
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
G(T^{-1}(0,t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} G(\left[\tfrac{1}{n+t},\tfrac{1}{n}\right)) = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+\alpha}d\alpha = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{t}{n+1}}^{\frac{t}{n}}\frac{1}{1+\alpha}d\alpha \\
&= \frac{1}{\log 2}\int_0^t \frac{1}{1+\alpha}d\alpha = G(0,t).
\end{aligned}$$

□

Zwischen der Gauß-Abbildung und den Kettenbrüchen herrscht der folgende Zusammenhang. Sei $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ...]$ eine beliebige irrationale Zahl (mit gegebener Kettenbruchentwicklung), dann gilt wegen

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{[a_1,a_2,a_3,...]} = \frac{1}{\frac{1}{a_1+[a_2,a_2,a_3,...]}} = a_1 + [a_2,a_3,...]$$

die Gleichung

$$T(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor\frac{1}{\alpha}\right\rfloor = a_1 + [a_2,a_3,...] - \lfloor a_1 + [a_2,a_3,...]\rfloor = [a_2,a_3,a_4,...].$$

Damit wird durch die Gauß-Abbildung der vorderste Koeffizient des Kettenbruchs entfernt.

10.2 Wachstumsrate von fast allen $q_n \to \infty$

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Wachstumsrate von fast allen q_n. Der erste Teil des Beweises ist an [4] (Seite 9-10) orientiert. Ab der Fallunterscheidung wurde der Beweis durch den Verfasser erstellt. Hauptsächlich mit Hilfe des Ergodensatzes lässt sich die folgende Eigenschaft herleiten.

Satz 16. *Es gilt*

$$\frac{1}{n}\log q_n(\alpha) \to \frac{1}{\log 2}\frac{\pi^2}{12} \text{ fast überall, wenn } n \to \infty.$$

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass $-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k\alpha$ gegen den Wert $\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{\pi^2}{12}$ konvergiert. Danach wird gezeigt, dass $\frac{1}{n}\log q_n(\alpha)$ gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, indem der Grenzwert der Differenz $-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k\alpha - \frac{1}{n}\log q_n(\alpha)$ als Null bestimmt wird.
Aufgrund des Ergodensatzes (Satz 15) gilt

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k\alpha \to -\int_0^1 \log(\alpha)dG(\alpha).$$

Dieses Integral lässt sich mit Hilfe von partieller Integration, Taylorreihenentwicklung und dem Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ bestimmen als

$$-\int_0^1 \log(\alpha)dG(\alpha) = \frac{1}{\log 2}\frac{\pi^2}{12}.$$

Dies geschieht wie folgt. Werden für die partielle Integration $\int f'g = fg + \int fg'$ die Funktionen $f(\alpha) = \log(1+\alpha)$ und $g(\alpha) = \log\alpha$ gewählt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}-\int_0^1 \log(\alpha)dG(\alpha) &= -\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log\alpha}{1+\alpha}d\alpha = -\frac{1}{\log 2}\left(\Big[\log\alpha\cdot\log(1+\alpha)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}d\alpha\right)\\ &= \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}d\alpha.\end{aligned}$$

Die Taylorreihenentwicklung von $f(\alpha) = \log(1+\alpha)$ an der Stelle $\alpha_0 = 0$ ergibt sich zu

$$\log(1+\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}(\alpha-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\cdot\alpha^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\alpha^n,$$

da $f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+0)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$ für $n = 1, 2, ...$ ist.
Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}d\alpha &= \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\alpha^n}{\alpha}d\alpha = \frac{1}{\log 2}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\alpha^{n-1}d\alpha\\ &= \frac{1}{\log 2}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\alpha^n\Big]_0^1 = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\\ &= \frac{1}{\log 2}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \frac{1}{\log 2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\log 2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{1}{\log 2}\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k\alpha - \frac{1}{n}\log q_n(\alpha) \to 0 \quad \text{für} n \to \infty.$$

Es lässt sich mit vollständiger Induktion und Lemma 1 beweisen, dass

$$p_{n+1}(\alpha) = q_n(T\alpha) \tag{1}$$

gilt und somit

$$q_n(\alpha) = q_n(\alpha)\cdot\frac{q_{n-1}(T\alpha)}{p_n(\alpha)}\cdot\frac{q_{n-2}(T^2\alpha)}{p_{n-1}(T\alpha)}\cdot\frac{q_{n-3}(T^3\alpha)}{p_{n-2}(T^2\alpha)}\cdot\ldots\cdot\frac{q_0(T^n\alpha)}{p_1(T^{n-1}\alpha)} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}.$$

Damit bleibt zu zeigen

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(T^k\alpha\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dazu reicht es zu zeigen, dass ein $C < 0$ existiert, so dass

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(T^k\alpha\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right| < C \quad \text{für } n \to \infty.$$

Es gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(T^k\alpha\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\log T^k\alpha - \log\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right|. \tag{2}$$

Nun wird der Mittelwertsatz auf jede einzelne Differenz angewendet. Dadurch gelingt eine Abschätzung jedes Summanden. Schließlich wird die gewünschte Beschränktheit der gesamten Summe folgen. Das auftauchende Supremum bei der Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt sich zu

$$\sup\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right) : \alpha \in \left(T^k\alpha, \frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right\} = \min\left\{\frac{1}{T^k\alpha}, \left(\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right)^{-1}\right\}$$

Da $\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}$ der $(n-k)$-te Näherungsbruch für $T^k\alpha$ ist, muss er größer als $T^k\alpha$ sein, falls $n-k$ ungerade ist. Aus dem gleichem Grund ist $\left(\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right)^{-1}$ kleiner als $T^k\alpha$, falls $n-k$ gerade ist (Vgl. Satz 4). Eine Gleichheit kann nicht auftreten. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass $n-k$ ungerade ist.

Fall 1: $T^k\alpha < \frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}$

Nach Satz 4 gilt

$$\frac{p_{n-k-1}(T^k\alpha)}{q_{n-k-1}(T^k\alpha)} < T^k\alpha < \frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}. \tag{3}$$

Somit ergibt sich für jeden Summanden aus (2) mit ungeradem Index, da $\log'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned}
\left|\log(T^k\alpha) - \log\left(\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right| &\overset{\text{MWS}}{\leq} \frac{1}{T^k\alpha}\left|\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)} - T^k\alpha\right| \\
&\overset{\text{Satz 5}}{\leq} \frac{1}{T^k\alpha} \cdot \frac{1}{q_{n-k}^2(T^k\alpha)} \overset{(3)}{\leq} \frac{q_{n-k-1}(T^k\alpha)}{p_{n-k-1}(T^k\alpha)} \cdot \frac{1}{q_{n-k}^2(T^k\alpha)} \\
&\overset{\text{Lemma 1}}{\leq} \frac{q_{n-k-1}(T^k\alpha)}{p_{n-k-1}(T^k\alpha)} \cdot \frac{1}{q_{n-k-1}(T^k\alpha)q_{n-k}(T^k\alpha)} \\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{q_{n-k-2}(T^{k+1}\alpha)q_{n-k}(T^k\alpha)} \overset{\text{Satz 2}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2}.
\end{aligned}$$

Fall 2: $T^k\alpha > \frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}$
Es ergibt sich für jeden Summanden aus (2) mit geradem Index

$$\begin{aligned}
\left|\log(T^k\alpha) - \log\left(\frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right)\right| &\overset{\text{MWS}}{\leq} \frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}\left|T^k\alpha - \frac{p_{n-k}(T^k\alpha)}{q_{n-k}(T^k\alpha)}\right| \\
&\overset{\text{Satz 5}}{\leq} \frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)} \cdot \frac{1}{q_{n-k}^2(T^k\alpha)} \overset{(1)}{=} \frac{1}{q_{n-k-1}(T^{k+1}\alpha)q_{n-k}(T^k\alpha)} \\
&\overset{\text{Satz 2}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2}.
\end{aligned}$$

Für die ganze Summe folgt die folgende Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\log T^k\alpha + \log\frac{q_{n-k}(T^k\alpha)}{p_{n-k}(T^k\alpha)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2} = \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Mit $C := 4$ ergibt sich aufgrund der Vorüberlegungen

$$\left|-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k\alpha - \frac{1}{n}\log q_n(\alpha)\right| \leq \left|-\frac{1}{n}\cdot C\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz bietet eine Aussage für das Approximationsverhalten für fast alle Kettenbruchentwicklungen.

Satz 17. *Für fast alle α gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{-\pi^2}{6\log 2}$$

Beweis. Der Beweis folgt mit den Sätzen 5, 6 und 16. Die Beweisidee stammt aus [6] auf Seite 86.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| &\overset{\text{Satz 5}}{>} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{q_nq_{n+1}}\right) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(q_nq_{n+1}\right)\\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log q_n - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log q_{n+1}\\
&\overset{\text{Satz 16}}{=} -\frac{-\pi^2}{6\log 2}.
\end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich der Grenzwert auch wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| &\overset{\text{Satz 6}}{<} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}\right) < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{2q_nq_{n+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{2q_n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right)\\
&< \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{q_{n+2}}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{q_{n+1}}\right)\\
&\overset{\text{Satz 16}}{=} -\frac{-\pi^2}{6\log 2}.
\end{aligned}$$

Mit den beiden gezeigten Abschätzungen ergibt sich die Behauptung. □

10.3 Asymptotik

Die folgenden Sätze bieten eine asymptotische Aussage über die Mittelwerte fast aller a_k und folgen mit Hilfe des Ergodensatzes. Zunächst wird gezeigt, welche Aussage für das geometrische Mittel gilt. Der folgende Beweis folgt in Anlehnung an [6] Seite 81 bis 82.

Satz 18. *Für fast alle $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ...]$ gilt*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{\frac{1}{N}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}.$$

Beweis. Um den Ergodensatz anwenden zu können, muss zunächst das Produkt in eine Summe überführt werden. Aus diesem Grunde wird $(\prod_{n=1}^{\infty} a_n)^{\frac{1}{N}}$ zunächst logarithmiert und es ergibt sich

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_n) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\infty}\log\left\lfloor\frac{1}{T^n(\alpha)}\right\rfloor.$$

Nun muss noch die Funktion f definiert werden, damit der Ergodensatz angewendet werden kann

$$f(\alpha) = \log\left\lfloor\frac{1}{\alpha}\right\rfloor = \log(a_1).$$

Für diese Funktion gelten die folgenden Eigenschaften

$$f(T^k\alpha) = \log \left\lfloor T^k(\alpha) \right\rfloor = \log(a_k)$$
$$f(\alpha) = \log(a_1) \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) = \log k \qquad \forall\, \alpha \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right].$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$ wird später gezeigt (Siehe (2)). Somit folgt aufgrund des Ergodensatzes

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(\alpha)) &= \int_0^1 f(\alpha) dG(\alpha) = \int_0^1 \log(a_1) dG(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k dG(\alpha) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+\alpha} dG(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \Big[\log(1+\alpha)\Big]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \left(\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\log 2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \log k \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nun muss gezeigt werden, dass die zuletzt genannte Summe einen endlichen Grenzwert hat. Daraus folgt, dass $f \in L((0,1), B(0,1), G)$ gilt, da aufgrund des endlichen Grenzwerts auch das Integral von f über $(0,1)$ endlich ist. Die Existenz eines endlichen Grenzwerts kann gezeigt werden, indem zunächst die asymptotische Äquivalenz der Summanden zu $\frac{\log k}{k(k+2)}$ gezeigt wird. Mit den Regeln von L'Hospital folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\log k}{k(k+2)}}{\log k \log(1+\frac{1}{k(k+2)})} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2+2k}}{\log(1+\frac{1}{k(k+2)})} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k^2+2k)^2}(-1)(2k+2)}{\frac{1}{1+\frac{1}{k^2+2k}}(-1)\frac{1}{(k^2+2k)^2}(2k+2)} \\
&= \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{k(k+2)} = 1
\end{aligned}$$

Aufgrund der gezeigten Asymptotik reicht es zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k(k+2)}$ konvergiert. Dann muss auch die Summe in (1) konvergieren. Die folgenden Umformungen gelten, da $f'(x) < 0, f(x) > 0 \;\forall\; x > e^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\log k}{k(k+2)} \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} = \int_2^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx. \qquad (2)$$

Dieses Integral lässt sich nun mit partieller Integration lösen

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx &= \Big[\log x(-1)\frac{1}{x}\Big]_2^{\infty} - \int_2^{\infty} \frac{1}{x}(-1)\frac{1}{x} dx = -\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} + \log(2) \cdot \frac{1}{2} + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_2^{\infty} \\
&= \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz von $\frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \log k \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$ gezeigt und nach (1) somit auch von dem Integral $\int_0^1 f(\alpha)dG(\alpha)$. Nun ergibt sich nach (1)

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\infty} \log(T^n(\alpha)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \exp\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n)\right) = exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)\right)\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{\frac{1}{N}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}} = 2{,}6854520010...
\end{aligned}$$

wodurch die Behauptung gezeigt ist. □

Im folgenden Satz wird die asymptotische Dichte angegeben, mit der eine natürliche Zahl k in der Folge der a_n auftritt.

Satz 19. *Für fast alle* $\alpha = [a_1, a_2, ...]$ *gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{1 \le n \le N : a_n = k\} = \frac{1}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right).$$

Beweis. (Vgl. [6], Seite 81) Um den Ergodensatz anzuwenden, muss der in der Behauptung stehende Ausdruck in eine andere Form gebracht werden

$$\#\{1 \le n \le N : a_n = k\} = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(T^n(\alpha)).$$

Die charakteristische Funktion $\chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}$ ist offensichtlich in $f \in L((0,1), B(0,1), G)$. Somit kann der Ergodensatz angewendet werden, so dass mit

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(T^n(\alpha)) &= \int_0^1 \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(\alpha)dG(\alpha) = \frac{1}{\log 2}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+\alpha}d\alpha\\
&= \frac{1}{\log 2}\left(\log(1+\frac{1}{k}) - \log(1+\frac{1}{k+1})\right) = \frac{1}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)
\end{aligned}$$

die Behauptung folgt. □

Es gibt noch weitere Asymptoten für die Folge a_k. Eine Weitere wird im Folgenden noch dargestellt. Sie ist in [6] auf Seite 83 als Behauptung geschrieben, jedoch nicht bewiesen.

Satz 20. *Für fast alle* $\alpha = [a_1, a_2, ...]$ *gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_N}} = \frac{\log 2}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)}.$$

Beweis. In diesem Fall ist die gesuchte Funktion f, auf die der Ergodensatz angewendet wird, gegeben durch $f(\alpha) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor}$. Mit dem Ergodensatz folgt dann

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{T^n(\alpha)} \right\rfloor} = \int_0^1 \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor} dG(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} dG(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+\alpha} dG(\alpha)$$
$$= \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass diese Summe konvergiert. Dazu wird zunächst gezeigt, dass ihre Summanden asymptotisch wie $\frac{1}{k^2(k+2)}$ wachsen. Nach den Regeln von L'Hospital gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2(k+2)}}{\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(k+2)}}{\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)} = 1.$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+2)}$ ist offensichtlich. Durch eine Umformung wird die gezeigte Gleichung in die richtige Form gebracht

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{N}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\frac{1}{a_n}}} = \frac{\log 2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)} = 1{,}74540566\ldots \quad .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

11 Ausblick

In der Darstellung der Theorie der Kettenbrüche wurden einige interessante Aspekte aufgrund von Platzmangel nicht dargestellt. So wurde beispielsweise die Pell'sche Gleichung $x^2 - Ny^2 = 1$ nur kurz in dem historischen Abriss erwähnt, aber es wurde nicht näher darauf eingegangen. Auch jede Art anderer Kettenbrüche, zum Beispiel mit Funktionen statt natürlichen Zahlen a_k, wurde nicht beschrieben (Vgl. [3], Seite 17). Ebenso die Darstellung der besten Näherungen 1. und 2. Art (Vgl. [2], Seite 22-30).

Besonders in der Ergodentheorie wurden viele Aspekte ausgeklammert. Vor allem der Aufbau der Theorie und der Beweis der zentralen Sätze wurden nicht gegeben. Auch die Ergodizität der Gauß-Abbildung konnte nicht gezeigt werden. Eine Betrachtung der Konvergenz von $\frac{1}{n}\log q_n(\alpha)$ in Bezug auf quadratische Irrationalitäten wurde ausgespart (Vgl. [6], Seite 87).

Ebenso wurde der Vergleich zwischen der Dezimaldarstellung und der Kettenbruchdarstellung bezüglich ihres Informationsgehaltes bei einer hinzugefügten Zahl hinter dem Komma, bzw. einem weiteren a_k, nicht betrachtet. Bei diesem Vergleich schneidet die Kettenbruchentwicklung etwas besser als die Darstellung durch Dezimalzahlen ab. Der zentrale Begriff in dieser Thematik ist die Entropie (Vgl. [6], Seite 89).

Literatur

[1] Brezinski, C.: *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. S. 1–3, 7, 13–14, 44, 48, 51, 97, 109–113. Berlin, Heidelberg, 1991.

[2] Khintchine, A.: *Kettenbrüche*. S. 1–54. Leipzig, 1956.

[3] Lorentzen, L. und H. Waadeland: *Continued Fractions with Applications*. In: Brezinski, C. und L. Wuytack (Hrsg.): *Studies in Computational Mathematics 3*, S. 17. Amsterdam, 1992.

[4] Petersen, K.: *Lecture Notes: The Continued Fraction System (and Related Systems)*. S. 5, 9–10. North Carolina, 2005.

[5] Silva, C. E.: *Invitation to Ergodic Theory*. In: Folland, G. B., B. Osgood, R. Formann und M. Starbird (Hrsg.): *Student Mathematical Library. Volume 42*, S. 39, 69, 96, 118, 152–153, 175–176, 182–183. Rhode Island, 2008.

[6] Steuding, J.: *Lecture Notes: Ergodentheorie*. S. 81–89. Würzburg, 2009.

[7] Stratmann, B.: *Lecture Notes: Introduction into Continued Fractions*. S. 5–7. St. Andrews, 2002.

[8] Stratmann, B.: *Lecture Notes: Introduction to Number Theory. Elementary Diophantine Approximation*. S. 3, 13–15. St. Andrews, 2002.