Universität Bremen

Fachbereich 3 - Mathematik

Sommersemester 2010

Der Primzahlsatz

Bachelorarbeit

im Studiengang 2-Fach Bachelor

eingereicht von:

Matr.Nr.:
E-Mail:

eingereicht am: 14. Juli 2010

Betreuer: Prof. Dr. Bernd O. Stratmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Historischer Hintergrund **3**

3 Vorbereitung und Definitionen **6**

3.1 Komplexe Zahlen 6

3.1.1 Die Funktionen $\exp(s)$ und $\log(s)$ 6

3.1.2 Die Funktion x^s für komplexe Zahlen s 7

3.1.3 Holomorphie 7

3.2 Wichtige Funktionen 8

3.2.1 Dirichlet-Reihen 9

3.3 Newman-Ingham Theorem 10

4 Der Beweis **11**

4.1 Die Struktur 11

4.2 Lemmata 13

4.3 Der Primzahlsatz 23

5 Satz von Tschebyschow **24**

5.1 $\sum \frac{1}{p}$ divergiert 27

1 Einleitung

Primzahlen waren jeher ein viel beachteter und geradezu mystischer Bestandteil der Mathematik. Die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen stellen durch ihre vollkommen willkürlich erscheinende Verteilung die Mathematiker bis heute vor viele offene Fragen.
Neben der langen Liste ungelöster Primzahl-Probleme, gibt es auch aussagekräftige Resultate, die bereits bekannt und bewiesen sind. Zu ihnen gehört die berühmte Aussage Euklids, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, sowie Eulers Erkenntnis, dass $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergiert.
Eines der wichtigsten Resultate über die Verteilung der Primzahlen ist der sogenannte „Primzahlsatz“. Er besagt, dass es „etwa“ $\frac{x}{\log x}$ Primzahlen unter den natürlichen Zahlen kleiner gleich $x \in \mathbb{R}_+$ gibt. Bezeichnet $\pi(x)$ diese Anzahl an Primzahlen $p \leq x$, so lässt sich der Satz etwas präziser ausdrücken durch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

Auch wenn die Aussage des Primzahlsatzes in das mathematische Teilgebiet der analytischen Zahlentheorie fällt, so verwenden dennoch die meisten seiner Beweise tiefgreifende Ergebnisse aus der Funktionentheorie. Besonders die Riemannsche Zeta-Funktion hat sich als erfolgreiches Hilfsmittel erwiesen.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit soll daher der Primzahlsatz stehen. Zunächst wird in Kapitel 2 der historische Hintergrund chronologisch erläutert. Dann werden in Kapitel 3 die formalen Voraussetzungen geschaffen, um den Primzahlsatz in Kapitel 4 beweisen zu können. Am Anfang des vierten Kapitels wird auf die Struktur des Beweises eingegangen und versucht, diese anhand eines Schaubildes zu verdeutlichen. Danach folgen zahlreiche Lemmata und schließlich der Beweis des Primzahlsatzes. Abschließend wird in Kapitel 5 eine Aussage Tschebyschows bewiesen, die eng mit dem Primzahlsatz in Verbindung steht.
Der Beweis des Primzahlsatzes in Kapitel 4 stellt zweifelsfrei den Kern dieser Arbeit dar. Er geht auf D.J.Newman zurück (vgl. [6]) und enthält zahlreiche Verbesserungen, unter anderem von J.Korevaar und D.Zagier (vgl. [7]). Besonderen Einfluss auf diese Arbeit hatte eine Version von Zagiers Beweis, welche in [1] zu finden ist.
Im Vergleich zu den vorherigen Beweisen ist Newmans Weg besonders einfach und kurz. Dies veranlasste Zagier im Abstract seiner Version von Newmans Beweis zu schreiben (siehe [1]):

„The resulting proof of the prim number theorem is short, beautiful and understandable without any knowledge of number theory or complex funktion theory beyond Cauchy's theorem; it should be known to every mathematician.“

Diese Aussage unterstreicht die mathematische Bedeutung von Newmans Beweis. Es erscheint daher angemessen, ihn als Inhalt einer Bachelorarbeit zu wählen.

2 Historischer Hintergrund

Dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist, wusste schon Euklid vor über 2000 Jahren. Diese Tatsache, die in unser Notation $\pi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ bedeutet, blieb lange Zeit das beste Resultat, welches über die Verteilung der Primzahlen bekannt war. Wie die Primzahlen unter den natürlichen Zahlen verteilt sind und in welcher Größenordnung $\pi(x)$ steigt, blieb lange Zeit jedoch unbeantwortet.
Wichtige Fortschritte in diesem Gebiet gelangen erst im 18. Jahrhundert herausragenden Mathematikern wie Euler, Legendre, Gauß, Tschebyschow, Riemann und vielen anderen.
Im 18. Jahrhundert konnte etwa Euler zeigen, dass unter den natürlichen Zahlen der Anteil an Primzahlen geringer wird, je höhere Zahlen man betrachtet. Euler bewies sogar, dass $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ für $x \to \infty$ gilt. Die „Dichte" der Primzahlen konvergiert also bei ansteigendem x gegen 0. Des Weiteren zeigte er das bemerkenswerte Resultat, dass die Summe $\sum \frac{1}{p}$ über den Kehrwerten aller Primzahlen divergiert.
Über die Geschwindigkeit, mit der $\pi(x)$ gegen Unendlich strebt, war zu Eulers Zeit noch wenig bekannt. Nur ausführliche Primzahltabellen gaben Aufschluss über die genaue Verteilung der Primzahlen. Im Jahr 1798 verglich Legendre die aus den Tabellen entnommenen Werte von $\pi(x)$ mit seiner Funktion $\lambda(x) := \frac{x}{\log x - A}$ $(A = 1,08366)$ und erkannte eine erstaunlich gute Übereinstimmung. Unwissend dieser Tatsache, vermerkte Gauß 1849 in einem Brief an einen mathematischen Kollegen, dass er bereits 1793 (im Alter von 16 Jahren!) die Vermutung aufgestellt hatte, $\pi(x)$ würde sich nahe den Werten der Funktion $li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ bewegen (vgl. [2]).
Auf die Vermutung von Legendre aufmerksam gemacht, bemerkte er sofort, dass sich mittels Partieller Integration $li(x) \sim \lambda(x) \sim \frac{x}{\log x}$ bei $x \to \infty$ zeigen ließe. Diese von Gauß und Legendre am Ende des 18. Jahrhunderts aufgestellte Vermutung, welche zusammengefasst

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

besagt, nennt man heute den Primzahlsatz. Weder Gauß noch Legendre gelang jedoch ein Beweis ihrer Vermutung.
Wie Tabelle 1 zeigt, sind die Lücken zwischen $\pi(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ für die angegebenen Werte x relativ groß. Bessere Werte liefern die Funktionen $\frac{x}{\log x - 1}$ und $li(x)$, welche beide asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\log x}$ sind. Um den Primzahlsatz zu beweisen, würde es also auch reichen, etwa $\pi(x) \sim li(x)$ zu zeigen.
Dass die Werte von $\frac{x}{\log x}$ nicht zwangsläufig unter den Werten von $\pi(x)$ liegen müssen, konnte J.Littlewood 1914 zeigen. Er bewies, dass die Werte von $\pi(x)\frac{\log x}{x}$ unendlich oft sowohl größer, als auch kleiner 1 sind.
Die nächsten nennenswerten Resultate auf dem Weg zu einem Beweis des Primzahlsatzes gelangen dem russischen Mathematiker Tschebyschow. Zwar konnte er noch nicht zeigen, dass $\pi(x)\frac{\log(x)}{x}$ für $x \to \infty$ gegen den Wert 1 konvergiert, doch es gelang ihm, zwei Konstanten C_1 und C_2 anzugeben, sodass $C_1 < \pi(x)\frac{\log(x)}{x} < C_2$ für $x \geq 2$ gilt. Dass diese beiden Konstanten existieren, wird in Kapitel 5 dieser Arbeit gezeigt.
Im Jahre 1852 bewies Tschebyschow, dass die Werte von $\pi(x)\frac{\log(x)}{x}$ für hinreichend große x zwischen $C_1 = 0,92129$ und $C_2 = 1,1055$ liegen müssen. Mit weitaus größerem Aufwand konnte J.Sylvester 1892 beide Faktoren auf $C_1 = 0,95695$ und

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\frac{x}{\log x - 1}$	$li(x)$
10	4	4	7	5
100	25	22	28	29
1.000	168	145	169	177
10.000	1.229	1.086	1.218	1.246
100.000	9.592	8.686	9.512	9.630
1.000.000	78.498	72.382	78.031	78.628
10.000.000	664.579	620.421	661.459	664.818

Tabelle 1: Vergleich (gerundeter!) Funktionswerte für verschiedene Zahlen x.

$C_2 = 1,04423$ verschärfen (vgl. [2]).
Ein zweites, von Tschebyschow bewiesenes Resultat besagt, dass wenn die Funktion $\pi(x)\frac{\log(x)}{x}$ für $x \to \infty$ konvergiert, ihr Grenzwert den Wert 1 haben muss.
Diese beiden von Tschebyschow mit elementaren Mitteln bewiesenen Sätze wecken den Anschein, dass der Primzahlsatz hiermit „fast“ bewiesen wäre. Die angegebenen Konstanten C_1 und C_2 liegen verdächtig nah an der Zahl 1, sodass die Konvergenz von $\pi(x)\frac{\log(x)}{x}$ als sehr wahrscheinlich erscheint. Dennoch stagnierte die asymptotischen Bestimmung von $\pi(x)$ bis in die 90er Jahre des 19. Jahrhunderts.
Erst wichtige Fortschritte im Bereich der Funktionentheorie und im Besonderen die von Riemann 1859 veröffentlichte Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ führte zu weiteren Fortschritten. In seiner, nur neun Druckseiten umfassenden Arbeit, befasste sich Riemann mit der nach ihm benannten komplexwertigen Zeta-Funktion. Er bewies viele wichtige Eigenschaften dieser, für Re $s > 1$, durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

definierten Funktion und stellte einige Vermutungen über ihr Verhalten in der komplexen Ebene auf. Außerdem zeigte er einen Zusammenhang zwischen $\zeta(s)$ und der Verteilung der Primzahlen, was in den darauf folgenden Jahrzehnten viele Mathematiker veranlasste, sich über diesen funktionentheoretischen Ansatz einem Beweis des Primzahlsatzes zu nähern.
Nachdem die Ideen Riemanns von der mathematischen Gemeinschaft aufgenommen, verstanden und weitergeführt wurden, gelang es schließlich im Jahre 1896 dem französischen Mathematiker Hadamard und dem belgischen Mathematiker de La Vallee Poussin den Primzahlsatz zu beweisen. Diese Beweise entstanden ebenfalls unabhänging voneinander, wie schon die Vermutungen von Legendre und Gauß etwa 100 Jahre zuvor.
Beide Beweise bauen stark auf der Tatsache auf, dass $\zeta(s)$ auf der Geraden Re $s = 1$ nullstellenfrei ist und verwenden wichtige Ergebnisse aus der Funktionentheorie. Diese und andere Eigenschaften der Zeta-Funktion sind noch bis heute Grundlage der meisten und leichteren Beweise des Primzahlsatzes (vgl. [5]).
Am Anfang des 20. Jahrhunderts, nachdem die Beweise von Hadamard und de la Vallee Poussin bekannt wurden, warfen Mathematiker die Frage auf, ob der Primzahlsatz auch mit elementaren Mitteln bewiesen werden könnte. Diese Frage wurde

1949 von Selberg und Erdös bejaht, die Beweise präsentierten, welche vollständig die Methoden der komplexen Analysis umgingen und sich nur auf elementare Mittel stützten. Dennoch waren beide Beweise keinesfalls einfach und äußerst lang (vgl. [2]).
Im Jahr 1980 gelang es D.J.Newman einen bemerkenswert kurzen und einfachen Beweis des Primzahlsatzes zu geben. Er zeigte die Richtigkeit eines Satzes, welcher schon 1935 durch A.Ingham in anderer Form und mit weitaus schwierigeren Methoden bewiesen wurde. Er erkannte außerdem, dass sich dieses Resultat für einen Beweis des Primzahlsatzes verwenden lässt.
Der besagte Satz ist in Abschnitt 3.3 dieser Arbeit zu finden und stellt eine Version des allgemeineren „Ikehara-Wiener-Theorems“ dar, welches zur Familie der Tauber-Sätze gehört. Newmans erstaunlich kurzer Beweis, welcher nur wenige Mittel aus der komplexen Analysis benötigt, konnte 1982 von J.Korevaar weiter vereinfacht werden.
Zum 100 jährigen Jubiläum der ersten Beweise des Primzahlsatzes, stellte D.Zagier eine Version des Beweises von Newman und den Verbesserungen von Korevaar vor. Der in dieser Arbeit geführte Beweis entspricht im Groben der Version von Zagier und enthält weitere Verbesserungen aus [1].

3 Vorbereitung und Definitionen

Bevor wir mit dem Beweis beginnen können, erscheint es sinnvoll, gewisse Vorbereitungen zu treffen. Besonders die formale Definition wichtiger Begriffe und oft gebrauchter Notationen sollte vorher festgelegt werden.
Dennoch ist dieses Kapitel so kurz wie möglich gehalten. Sein Umfang zeigt jedoch die Fülle an Vorwissen, das in den nächsten Kapiteln benötigt wird.

Definition 1. *Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt Primzahl, wenn 1 und n ihre einzigen positiven Teiler sind. Die Menge aller Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.*

Definition 2. *Für zwei reellwertige Funktionen f und g schreibt man*

$$f(x) \sim g(x) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

und nennt die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in diesem Fall asymptotisch äquivalent.

Wie sich leicht zeigen lässt, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Man kann die Definition so deuten, dass zwei asymptotisch äquivalente Funktionen in der gleichen Größenordnung steigen (bzw. fallen), wenn x gegen Unendlich strebt. Besonders effektiv sind Aussagen über asymptotische Äquivalenz bei nicht differenzierbaren Funktionen.

3.1 Komplexe Zahlen

Auch Wissen über komplexe Zahlen ist von Nöten. Sei s hier und im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine komplexe Zahl, sowie $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ ihr Real- und $t = \mathrm{Im}(s)$ ihr Imaginärteil, d.h.

$$s = \sigma + it \in \mathbb{C} \tag{3}$$

Die auf den ersten Blick etwas seltsam wirkende Vermischung von lateinischen und griechischen Buchstaben in (3) hat historische Gründe und soll desshalb hier beibehalten werden (vgl. [4]).

3.1.1 Die Funktionen $\exp(s)$ und $\log(s)$

Nun zu zwei Funktionen, die schon aus dem Reellen bekannt sein dürften. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ und der komplexe Logarithmus $\log(s)$, welcher die Gleichung $s = \exp(\log(s))$ erfüllt. Während $\exp(s)$ für alle komplexen Zahlen s definiert ist, lässt sich $\log(s)$ nur für $s \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ bestimmen.
Für komplexe Zahlen s aus dem jeweiligen Definitionsbereich gilt

$$\exp(r+s) = \exp(r)\exp(s) \qquad \exp(s) \neq 0$$
$$\exp'(s) = \exp(s) \qquad \log'(s) = \frac{1}{s}$$

Zudem besitzen beide Funktionen für reelle Argumente alle Eigenschaften ihrer reellen Pendants.

3.1.2 Die Funktion x^s für komplexe Zahlen s

Kommen wir jetzt zum Potenzieren im Komplexen. Wird eine positive reelle Zahl x zur s-ten Potenz erhoben, wobei s eine komplexe Zahl ist, so lässt sich dieser Wert mit Hilfe der Exponentialfunktion und dem Logarithmus wie folgt ausdrücken:

$$x^s := e^{s \log x}. \tag{4}$$

Für $s = \sigma + it$ ist damit

$$x^s = e^{(\sigma+it)\log x} = e^{\sigma \log x} e^{i(t \log x)} = x^\sigma e^{i(t \log x)}.$$

Erinnern wir uns an Eulers Identität $e^{ik} = \cos k + i \sin k$ und an die Betragsfunktion im Komplexen $|s| := \sqrt{\sigma^2 + t^2}$, so folgt

$$|e^{ik}| = |\cos k + i \sin k| = \sqrt{\cos^2 k + \sin^2 k} = 1$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$|x^s| = x^\sigma = x^{Re\, s} \tag{5}$$

welche wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch öfter gebrauchen werden.

3.1.3 Holomorphie

Ein zentraler Begriff dieser Arbeit ist der der „Holomorphie“. Diese Eigenschaft komplexwertiger Funktionen ist (nach [3]) wie folgt definiert:

Definition 3. *Es sei f eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ erklärte (komplexe) Funktion. f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar, wenn es eine in z_0 stetige Funktion Δ auf U gibt, so dass für alle $z \in U$*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$$

gibt. Ist f in allen $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, so heißt f holomorph auf U. f heißt holomorph in z_0, wenn es eine offene Umgebung von z_0 gibt, in der f holomorph ist.

Für unser Ziel, den Primzahlsatz zu beweisen, benötigen wir viele Eigenschaften holomorpher Funktionen. Selbsverständlich ist es hier nicht möglich, eine umfassende Einführung in die Funktionentheorie zu geben. Statt dessen werden wir das Wissen über (grundlegende) Eigenschaften holomorpher Funktionen weitestgehend voraussetzen und können hier nur wenige (aber durchaus wichtige) Eigenschaften nennen.

Voraussetzung 1. *Sei f eine, auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, dann gilt:*

- *f ist auf U beliebig oft komplex differenzierbar und jede Ableitungen definiert wieder eine holomorphe Funktion auf U.*

- *f ist stetig auf U.*

- *$|f(z)|$ ist endlich für alle $z \in U$*
- *Die Funktionen λf, $f+g$ und fg sind holomorph auf U, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ und g ebenfalls eine holomorphe Funktion auf U ist.*
- *$\frac{f}{g}$ ist holomorph auf U, wenn g in U holomorph ist und dort keine Nullstellen besitzt.*
- *f lässt sich lokal in jedem Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln.*

Für den letzten Punkt gilt auch die Umkehrung: lässt sich eine Funktion f in jedem Punkt von $U \subset \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickeln, so ist diese Funktion holomorph auf U. Aus dieser Tatsache ergibt sich beispielsweise die Holomorphie von $\exp(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$.
Ein wichtiges Hilfsmittel um die Holomorphie einer Funktion zu zeigen, ist auch der folgende Satz.

Voraussetzung 2 (Weierstaßscher Majorantentest)**.** *Ist die Reihe $\sum_i f_i$ mit holomorphen Funktionen f_i normal konvergent, so ist die Funktion*

$$U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(s)$$

holomorph und darf gliedweise differenziert werden.

Normalen Konvergenz ist nach [1] wie folgt definiert:

Definition 4. *Gegeben seien holomorphe Funktionen $f_j : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j$ heißt normal konvergent auf Ω, falls es zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 gibt sowie Zahlen $M_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|f_j(z)| \leq M_j$ für alle $z \in U$ und $\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty$.*

Um die Holomorphie einer Funktion $f(s) = \sum_i f_i(s)$ auf $U \subset \mathbb{C}$ zu beweisen, müssen wir nach Voraussetzung 2 also lediglich die normale Konvergenz der Reihe $\sum_i f_i$ von holomorphen Funktionen f_i auf U zeigen. Dies wird im weiteren Verlauf ausschließlich so geschehen, dass wir die Reihe $\sum_i |f_i|$ durch die absolut konvergente geometrische Reihe $\sum_n \frac{1}{n^a}$ $(a > 1)$ abschätzen. Dass diese Abschätzung ausreicht, muss an dieser Stelle vorausgesetzt werden.

3.2 Wichtige Funktionen

In der Einleitung haben wir bereits die Funktion $\pi(x)$ eingeführt. Eine formale Definition wird nun an dieser Stelle nachgeholt. Die Anzahl aller Primzahlen kleiner gleich einer reellen Zahl $x \geq 0$ sei definiert als

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x\} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}_+$$

wobei # die Mächtigkeit der nachstehenden Menge angibt. $\pi(x)$ stellt somit eine monoton steigende, unbeschränkte Treppenfunktion dar.
Eine, für unser weiteres Vorgehen ebenfalls wichtige Funktion, ist die Tschebyschowsche Theta-Funktion, welche als

$$\theta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log p \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}_+$$

definiert ist. Sie hat für $x < 2$ den Wert 0 und ist ebenfalls eine monoton steigende, unbeschränkte Treppenfunktion.
Nun zu zwei komplexwertige Funktionen. Die Phi- und Zeta-Funktion seien für komplexe Zahlen $s \in \mathbb{C}$, mit Re $s > 1$, wie folgt definiert:

$$\Phi(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s} \quad \text{und} \quad \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{6}$$

Beide Funktionen spielen im Beweis des Primzahlsatzes eine entscheidene Rolle. Zu beachten ist, dass ihre Darstellung in (6) nur für Re $s > 1$ gilt. Dennoch lassen sich beide Funktionen auf die ganze komplexe Ebene fortsetzen, genügen dann aber nicht mehr ihrer eben genannten Darstellung.
Dass $\Phi(s)$ und $\zeta(s)$ auf Re $s > 1$ holomorph sind, lässt sich in wenigen Schritten zeigen.
Sei $\delta > 0$ und Re $s \geq 1 + \delta$. Aus

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{Re\, s}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ folgt die normale Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.
Wegen $|\log p| \leq C p^{\frac{\delta}{2}}$ für ein $C > 0$ und alle hinreichend großen Primzahlen p, gilt

$$\left|\frac{\log p}{p^s}\right| \leq \frac{C p^{\frac{\delta}{2}}}{p^{Re s}} \leq \frac{C}{p^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

woraus die normale Konvergenz von $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s}$ folgt. Der Weierstraßsche Majorantentest (Voraussetzung 2) liefert nun die Holomorphie von $\Phi(s)$ und $\zeta(s)$ für Re $s > 1$.

3.2.1 Dirichlet-Reihen

Dirichlet-Reihen sind spezielle, in der analytischen Zahlentheorie verwendete Reihen. Ihren Namen tragen sie zu Ehren des französischen Mathematikers Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Definition 5. *Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, so nennt man Reihen der Gestalt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

Dirichlet-Reihen.

Eine wichtige Dirichlet-Reihen ist die Riemannsche Zeta-Funktion, welche man durch $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhählt. Auch $\log(\zeta(s))$ ist als Dirichlet-Reihe darstellbar. In diesem Fall lässt sich eine Reihe erzeugen, bei der alle a_n reell und nicht negativ sind. Dieses Ergebnis werden wir später in Lemma 5 benötigen.

3.3 Newman-Ingham Theorem

Der hier beschriebene Satz ist die entscheidende Verbesserung Newmans. Er erkannte, dass sich das Resultat für einen besonders kurzen Beweis des Primzahlsatzes verwenden lässt. Die Aussage des Newman-Ingham Theorems, welches zur Familie der Tauber-Sätze gehört, lässt sich grob so beschreiben: Ist $g(s)$ eine Funktion, die für Re $s > 0$ durch eine bestimmte Formel definiert und auf Re $s \geq 0$ holomorph fortsetzbar ist, so gilt diese Formel auch für $s = 0$.
Die eigentliche Aussage von Tauber-Sätzen ist jedoch keinesfalls so trivial wie hier dargestellt. Ihre Beweise sind meist äußerst schwierig und verwenden nicht einfach zu zeigende Resultate über Fourier-Transformationen.
Nun zur formalen Version des Theorems:

Voraussetzung 3 (Newman-Ingham Theorem)**.** *Sei die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar. Weiter sei die Laplace-Transformierte*

$$g : \{z \in \mathbb{C} | Re\ z > 0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$$

holomorph und holomorph fortsetzbar auf eine offene Obermenge von $\{z \in \mathbb{C} | Re\ z \geq 0\}$. Dann existiert

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T f(t) dt$$

und der Grenzwert hat den Wert $g(0)$.

Den Satz werden wir in Lemma 10 brauchen, um die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$ zu beweisen. Wenn man so will, werden alle vorher bewiesenen Resultate nur dafür benötigt, die erforderlichen Voraussetzungen zu schaffen, um diesen Satz anwenden zu können.

4 Der Beweis

Dieses Kapitel ist in drei Teile unterteilt. Zuerst wird auf die Struktur des Beweises eingegangen und versucht, diese zu veranschaulichen. Dann werden mehrere Lemmata bewiesen, sodass im drittel Teil der letzte Schritt des Primzahlsatzbeweises erfolgen kann.

4.1 Die Struktur

Wie bei vielen längeren Beweisen, ist auch hier die Beweisstruktur nicht immer sofort ersichtlich. Erst nach 11 Lemmata, die teilweise aufeinander aufbauen, teilweise in anderer Weise miteinander verknüpft sind, kann die eigentliche Aussage bewiesen werden.
Um die Struktur des Beweises also übersichtlicher zu gestalten, wurde für diese Arbeit ein Schaubild entworfen , welches die Beweisstruktur veranschaulichen soll (siehe Abb.1 nächste Seite). Diese Grafik zeigt neben den wichtigsten Zwischenergebnissen auch ihre Verknüpfungen untereinander und stellt diese durch Pfeile dar. Es ist zu beachten, dass diese Zwischenergebnisse nicht immer den einzelnen Lemmata im nachfolgenden Beweis entsprechen. Während manche Verknüpfungen formal recht schnell zu zeigen sind (und daher nicht als eigenes Lemma aufgeführt sind), werden bestimmte Lemmata von der Grafik vernachlässigt, da ihre Aussage wenig zur Struktur beiträgt und eher als ein Zwischenschritt zu einer wichtigeren Aussage angesehen werden kann.
Vereinfacht lässt sich die Beweisstruktur so beschreiben: Als erstes werden wichtige Eigenschaften der Funktion $\zeta(s)$ gezeigt, wie etwa die Holomorphie und Nullstellenfreiheit auf gewissen Mengen. Die Eigenschaften werden dann dafür verwendet, die Holomorphie von $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ auf einer bestimmten Menge zu beweisen. Diese Funktion lässt sich so umformen (ohne das die Holomorphie-Eigenschaft verloren geht), sodass sich das Newman-Ingham Theorem auf sie anwenden lässt. Damit ergibt sich die Konvergenz eines Integrals, welches von der Funktion $\theta(x)$ abhängt. Hieraus lässt sich $\theta(x) \sim x$ und anschließend $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ folgern.

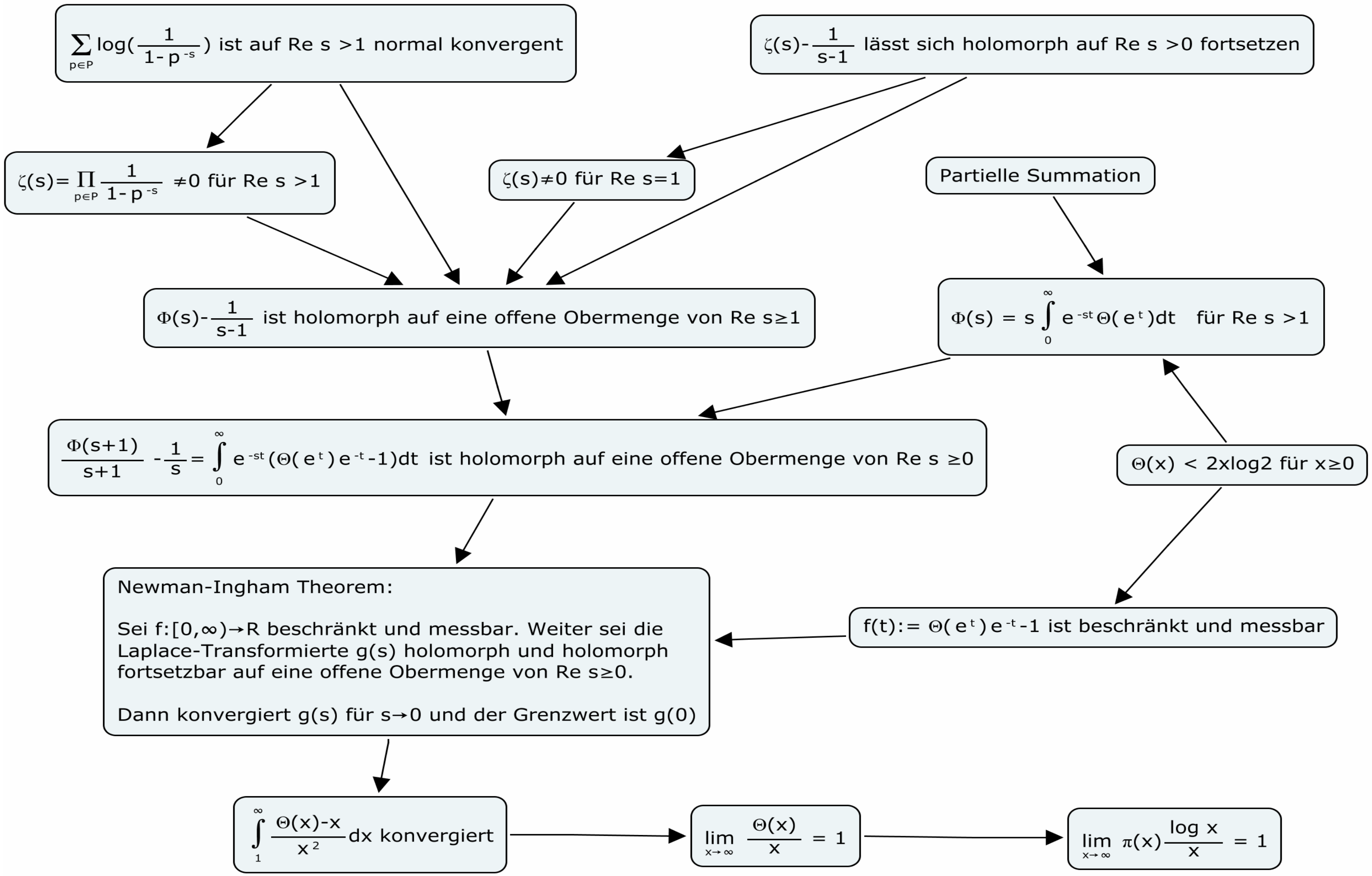

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Struktur des Primzahlsatzbeweises

4.2 Lemmata

Die erste, hier folgende Aussage konnte bereits im Jahre 1850 bewiesen werden. Genau wie die Definition $\theta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log p$, ist sie dem zahlentheoretischen Wirken Tschebyschows zu verdanken.

Lemma 1. *Für alle $x \geq 0$ gilt*

$$\theta(x) < 2x \log 2.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Behauptung für ganze $x \geq 0$ gilt, da $\theta(x)$ nur an diesen Stellen steigt.
Der Beweis erfolgt durch Induktion, wobei der Anfang mit $x = 1$ und $x = 2$ trivial ist ($\theta(2) = \theta(1) = 0$).
Sei zuerst $x > 2$ gerade und gelte die Behauptung für $x - 1$. Dann ist x definitiv keine Primzahl und wir erhalten

$$\theta(x) = \theta(x-1) < 2(x-1)\log 2 < 2x \log 2.$$

Sei nun $x = 2m + 1$ ungerade mit $m > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen kleiner x.
Nach dem binomischen Lehrsatz taucht der Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{2m+1}{m}$ zwei mal in der Entwicklung von $(1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$ auf. Damit erhalten wir die Ungleichung $2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$.
Weil alle Primzahlen p zwischen $m + 2$ und $2m + 1$ den Binomialkoeffizient

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{m+2}{1} \cdot \frac{m+3}{2} \cdots \frac{2m+1}{m}$$

teilen, erhalten wir

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}.$$

Anwendung des Logarithmus ergibt

$$\log(\prod_{p \leq 2m+1} p) - \log(\prod_{p \leq m+1} p) \leq \log(2^{2m})$$

und wegen $\theta(n) = \log(\prod_{p \leq n} p)$ folgt

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \leq 2m \log 2.$$

Mit der Induktionsannahme, dass die Behauptung für $m+1$ richtig ist, folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\theta(2m+1) &\leq 2m \log 2 + \theta(m+1) \\
&< 2m \log 2 + 2(m+1) \log 2 \\
&= 2(2m+1) \log 2.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $x \geq 0$ gezeigt. $\square$

Die nächsten fünf Lemmata geben Auskunft über wichtige Eigenschaften der Zeta-Funktion. Dies ist jedoch nicht immer sofort ersichtlich, wie etwa das folgede Lemma zeigt.

Lemma 2. *Die Reihe* $\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$ *ist auf Re* $s > 1$ *normal konvergent.*

Beweis. Sei Re $s > 1$. Zuerst zeigen wir, es gibt ein $P_0 > 0$, sodass

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(1) \text{ für alle } p \geq P_0.$$

Hierbei sei $\overline{B}_{\frac{1}{2}}(1)$ die abgeschlossene Kugel in der komplexen Ebene mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt 1.
Da $\frac{|z|}{|z-1|}$ für $z \to \infty$ gegen 1 läuft, existiert ein $R > 0$, sodass $\frac{|z|}{|z-1|} \leq 2$ bzw. $\frac{1}{|z-1|} \leq \frac{2}{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$.
Sei $P_0 := \max\{4, R\}$ und im Folgenden stets $p \geq P_0$. Wegen Re $s > 1$ ist

$$|p^s| = p^{Res} > p \geq \max\{4, R\}$$

d.h. $|p^s| > 4$ und $\frac{1}{|p^s-1|} \leq \frac{2}{|p^s|}$. Zusammen ergibt dies $\frac{1}{|p^s-1|} < \frac{1}{2}$. Aus

$$\left|\frac{1}{1-p^{-s}} - 1\right| = \left|\frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}\right| = \frac{1}{|p^s-1|} < \frac{1}{2} \tag{7}$$

erhalten wir $\frac{1}{1-p^{-s}} \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(1)$ für $p \geq P_0$.
Nun zeigen wir, dass auf $\overline{B}_{\frac{1}{2}}(1)$ die Ungleichung

$$|\log z| \leq C|z-1|$$

gilt, mit einer Konstanten $C > 0$. Wegen $\lim_{z\to 1} \frac{\log z}{z-1} = 1$ ist $\frac{\log z}{z-1}$ holomorph auf $B_1(1)$. Damit existiert

$$C := \sup\left\{\left|\frac{\log z}{z-1}\right| |z \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(1) \setminus \{1\}\right\} < \infty$$

und wir erhalten $|\log z| \leq C|z-1|$ für $z \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(1) \setminus \{1\}$. Da diese Ungleichung auch für $z = 1$ gilt, können wir $\left|\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right| \leq C\left|\frac{1}{1-p^{-s}} - 1\right|$ für $p \geq P_0$ schreiben. Wegen (7) folgt

$$\left|\frac{1}{1-p^{-s}} - 1\right| = \frac{1}{|p^s-1|} \leq \frac{2}{|p^s|} = \frac{2}{p^{Res}}$$

und wir erhalten für Re $s \geq 1+\delta$ mit $\delta > 0$

$$\left|\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right| \leq \frac{2C}{p^{1+\delta}}.$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{2C}{p^{1+\delta}}$ ergibt sich nun (durch Voraussetzung 2) die normale Konvergenz von $\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$. □

Lemma 3 lässt erahnen, wie die Zeta-Funktion mit der Verteilung der Primzahlen in Verbindung steht. Das Produkt in diesem Lemma wird „Euler-Produkt“ genannt und lässt sich für Dirichlet-Reihen verallgemeinern. Durch die Darstellung der Zeta-Funktion als Euler-Produkt wird zudem schnell klar, dass $\zeta(s)$ auf Re $s > 1$ keine Nullstellen besitzt.

Lemma 3. *Für Re $s > 1$ gilt*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0.$$

Beweis. Sei Re $s > 1$. Nach Lemma 2 konvergiert

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \log\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \log\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}\right)$$

normal gegen ein bestimmten Wert $z \in \mathbb{C}$. Daraus folgt, dass $\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ normal gegen $\exp(z) \neq 0$ konvergieren muss.
Sei nun $\mathbb{P}_m := \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ die Menge der ersten m Primzahlen und $\mathbb{N}(\mathbb{P}_m) := \{n \in \mathbb{N} | n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}, \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller möglichen Produkte dieser erstem m Primzahlen.
Für Re $s > 1$ betrachten wir folgende Gleichung:

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_m} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}_m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^k = \sum_{n \in \mathbb{N}(\mathbb{P}_m)} n^{-s}. \tag{8}$$

Die erste Umformung ist eine direkte Anwendung des Grenzwertes der unendlichen geometrischen Reihe, was uns $|p^{-s}| = p^{-Res} < 1$ ermöglicht. Der zweite Umformungsschritt folgt aus dem Fundamentalsatz der Arithmetik, welcher besagt, dass sich jede natürliche Zahl auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen schreiben lässt. Die Umordnung und gliedweise Multiplikation in diesem Schritt sind möglich, da normale und somit absolute Konvergenz vorliegt, wie bereits gezeigt wurde.
Grenzübergang $m \to \infty$ liefert $\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s)$ für Re $s > 1$. □

Haben wir $\zeta(s)$ bisher nur auf Re $s > 1$ betrachtet und gezeigt, dass sich $\zeta(s)$ hier als Euler-Produkt und holomorphe Dirichlet-Reihe darstellen lässt, so werden wir jetzt den Definitionsbereich auf Re $s > 0$ erweitern. Wie sich herausstellen wird, ist $\zeta(s)$ auf Re $s > 0$ nicht mehr holomoph, dafür aber die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$. Diese Tatsache impliziert, dass $\zeta(s)$ an der Stelle $s = 1$ eine einfache Polstelle hat und dieser Pol der Einzige auf ganz Re $s > 0$ ist.

Lemma 4. *Die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ lässt sich holomorph auf Re $s > 0$ fortsetzen.*

Beweis. Wir schreiben $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ als unendliche Reihe. Mit Re $s > 1$ und

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}$$

ergibt sich die Reihendarstellung wie folgt:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} dx \right). \tag{9}$$

Da alle Folgenglieder dieser Reihe holomorph auf Re $s > 0$ sind, genügt es nach Voraussetzung 2 zu zeigen, dass die Reihe auf Re $s > 0$ normal konvergiert. Hierfür schätzen wir das Integral $|\int_n^{n+1} \big(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\big) dx|$ nach oben ab. Sei Re $s > 0$, so gilt wegen

$$\int_n^x \frac{1}{t^{s+1}} dt = \left[\frac{t^{-s}}{-s} \right]_n^x = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right)$$

die Abschätzung

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| = \left| s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{dt}{t^{s+1}} dx \right| \leq |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{dt}{|t^{s+1}|} dx.$$

Für $x \in [n, n+1]$ ist nun

$$\int_n^x \frac{1}{|t^{s+1}|} dt \leq \max_{t \in [n,x]} \frac{(x-n)}{|t^{s+1}|} \leq \max_{t \in [n,x]} \frac{1}{t^{(Res)+1}} = \frac{1}{n^{(Res)+1}}$$

und somit

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leq |s| \int_n^{n+1} \frac{1}{n^{(Res)+1}} dx = \frac{|s|}{n^{(Res)+1}}.$$

Betrachten wir Re $s > 0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{(Res)+1}}$ die normale Konvergenz der Reihe aus (9) und damit die behauptete holomorphe Fortsetzbarkeit von $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$. □

Das nächste Lemma wirkt zunächst etwas „aus der Luft gegriffen“. Seine Bedeutung wird jedoch schon im Beweis von Lemma 6 deutlich.

Lemma 5. *Für $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1.$$

Beweis. Sei $\sigma > 1$, $t \in \mathbb{R}$. Wir werden zeigen, dass

$$3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 0 \tag{10}$$

gilt, woraus durch Anwendung der Exponentialfunktion die Behauptung folgt (beachte $\zeta(\sigma) > 0$).
Jede komplexe Zahl z besitzt die Polardarstellung $z = |z| e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Wir können also $\log z = \log |z| + i\varphi$ und somit $\mathrm{Re}(\log z) = \log |z|$ schreiben.

Nach Abschnitt 3.2.1 existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen, sodass $\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ mit Re $s > 1$ gilt. Aus diesen beiden Überlegungen folgt :

$$\begin{aligned}
&3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+i2t)| \\
&= 3\operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma)) + 4\operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma+it)) + \operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma+i2t)) \\
&= 3\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\right) + 4\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}n^{-it}\right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}n^{-i2t}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\left(3 + 4\operatorname{Re}(n^{-it}) + \operatorname{Re}(n^{-i2t})\right).
\end{aligned}$$

Für $\gamma_n := -t\log n$ ergibt sich wegen $n^{-it} = e^{-it\log n} = \cos(\gamma_n) + i\sin(\gamma_n)$ und $\cos(2\gamma_n) = 2\cos^2(\gamma_n) - 1$

$$\begin{aligned}
3 + 4\operatorname{Re}(n^{-it}) + \operatorname{Re}(n^{-i2t}) &= 3 + 4\cos(\gamma_n) + \cos(2\gamma_n) \\
&= 2 + 4\cos(\gamma_n) + 2\cos^2(\gamma_n) \\
&= 2(1+\cos(\gamma_n))^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Da auch $\frac{a_n}{n^\sigma} \geq 0$ für $n \geq 1$, erhalten wir schließlich (10) und die Behauptung ist gezeigt. □

Nun können wir die Nullstellenfreiheit der Zeta-Funktion auf der Geraden Re $s = 1$ zeigen. Diese Eigenschaft ist essenziell bei den meisten Beweisen des Primzahlsatzes (siehe [5]).

Lemma 6. *Für alle $t \neq 0$ gilt $\zeta(1+it) \neq 0$.*

Beweis. Sei $B(\sigma)$ der Ausdruck aus Lemma 5. Für $\sigma > 1$ lässt sich

$$\begin{aligned}
B(\sigma) &:= \zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+i2t)| \\
&= (\sigma-1)\Big((\sigma-1)\zeta(\sigma)\Big)^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(\sigma-1)}\right|^4|\zeta(\sigma+i2t)|
\end{aligned}$$

schreiben. Wir wollen zeigen, dass $B(\sigma)$ beim Grenzübergang $\sigma \to 1^+$ gegen 0 konvergiert.
Nach Lemma 4 ist sowohl die Funktion $H(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ als auch ihre Ableitung $H'(s) = \zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2}$ holomorph auf Re $s > 0$. Hieraus ergibt sich

$$\zeta(\sigma)(\sigma-1) = 1 + H(\sigma)(\sigma-1) \xrightarrow[\sigma\to 1^+]{} 1$$

sowie

$$\begin{aligned}
\zeta(1+i2t) &= H(1+i2t) + \frac{1}{i2t} \quad \text{und} \\
\zeta'(1+it) &= H'(1+it) + \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

Angenommen es gibt ein $t \neq 0$ mit $\zeta(1+it) = 0$. Dann ist

$$\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1} = \frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1} \to \zeta'(1+it) \qquad \text{für } \sigma \to 1^+.$$

Wegen $\zeta(\sigma+i2t) \to \zeta(1+i2t)$ für $\sigma \to 1^+$ stellen wir also insgesamt fest, dass

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{B(\sigma)}{\sigma-1} = \left|\zeta'(1+it)\right|^4 |\zeta(1+i2t)|$$

endlich ist. Somit erhalten wir $\lim_{\sigma\to 1^+} B(\sigma) = 0$, was im Widerspruch zu Lemma 5 steht. □

Der eben geführte Beweis geht auf de La Vallee Poussin und Mertens zurück (vgl. [5]) und macht keinerlei direkten Gebrauch von der ursprünglichen Funktionsgleichung $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (für Re $s > 1$). Er kommt statt dessen mit wenigen Informationen über $\log(\zeta(s))$ und der Holomorphie von $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ auf Re $s > 0$ aus. Nun werden wir aus den bisher bewiesenen Eigenschaften der Zeta-Funktion auf die nachfolgende Eingenschaft der Phi-Funktion schließen. Da dieser Beweis insgesamt recht lang und kompliziert ist, sowie Wissen voraussetzt, welches bisher nicht erwähnt wurde und diesen Rahmen sprengen würde, ist an dieser Stelle nur eine Skizze des Beweises angegeben. Diese vereinfachte, lückenhafte Version eines Beweises erhebt keinen Anspruch auf formale Korrektheit und soll nur die grobe Beweisidee vermitteln. Für einen exakten Beweis, siehe [1].

Lemma 7. $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ *ist holomorph auf einer offenen Obermenge von Re* $s \geq 1$.

Beweisskizze. Aus Lemma 3 folgt

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right).$$

für Re $s > 1$. Wegen der in Lemma 2 gezeigte normale Konvergenz dürfen wir die Summe rechts gliedweise differenzieren und erhalten

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{d}{ds} \log(1-p^{-s}).$$

Aus den „Ableitungsregeln“ ergibt sich

$$\frac{d}{ds} \log(1-p^{-s}) = \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} = \ldots = \frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

und somit

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}.$$

Es ist daher ausreichend, die Holomorphie von

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \tag{11}$$

auf einer offenen Obermenge von Re $s \geq 1$ zu zeigen. Für die Summe links in (11) lässt sich aus einer knappen Abschätzung die Holomorphie auf Re $s \geq \frac{1}{2}$ folgern.
In Lemma 6 wurde gezeigt, dass $\zeta(s)$ auf Re $s \geq 1$, $s \neq 1$ nullstellenfrei ist. Da $\zeta'(s)$ auf dieser Menge holomorph ist (vergleiche Lemma 4), muss diese Eigenschaft auch für $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ gelten. Es bleibt die Holomorphie von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ im Punkt $s = 1$ zu zeigen.
Aus Lemma 4 folgt die Holomorphie von

$$H(s) := \zeta(s) - \frac{1}{1-s} \quad \text{und} \quad H'(s) = \zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2}$$

auf Re $s > 0$. Damit gilt

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \frac{H'(s)(s-1) + H(s)}{H(s)(s-1) + 1},$$

wobei dieser Ausdruck im Punkt $s = 1$ stetig ergänzbar ist. Daraus folgt, dass $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ auf ganz Re $s \geq 1$ holomorph ist. □

Das eben bewiesene Ergebniss wird erst später wird erst später wieder gebraucht. Zuerst folgt ein Lemma über abelsche partielle Summation.

Lemma 8 (Partielle Summation). *Sei $x > 0$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge reeller Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Des Weiteren sei*

$$A(x) := \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ t_n \leq x}} a_n$$

und $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ t_n \leq x}} a_n f(t_n) = A(x)f(x) - \int_{t_1}^{x} A(u)f'(u)du.$$

Beweis. Die Funktion $A(x)$ hat folgende Eigenschaften:

$$A(x) = A(t_n) \qquad \text{für } x \in [t_n, t_{n+1}) \tag{i}$$
$$A(t_n) - A(t_{n-1}) = a_n \qquad \text{für } n \geq 2 \tag{ii}$$
$$A(t_1) = a_1 \tag{iii}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $x \in [t_N, t_{N+1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{x} A(u)f'(u)du &= \int_{t_N}^{x} A(u)f'(u)du + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} A(u)f'(u)du \right) \\
&\overset{(i)}{=} A(t_N) \int_{t_N}^{x} f'(u)du + \sum_{n=1}^{N-1} \left(A(t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} f'(u)du \right) \\
&= A(t_N)f(x) - A(t_N)f(t_N) + \sum_{n=1}^{N-1} \left(A(t_n) \Big(f(t_{n+1}) - f(t_n) \Big) \right) \\
&= A(t_N)f(x) + \sum_{n=2}^{N} A(t_{n-1})f(t_n) - \sum_{n=1}^{N} A(t_n)f(t_n) \\
&= A(x)f(x) + \sum_{n=2}^{N} \left(A(t_{n-1}) - A(t_n) \right) f(t_n) - A(t_1)f(t_1) \\
&\overset{(ii)}{=} A(x)f(x) - \sum_{n=2}^{N} a_n f(t_n) - A(t_1)f(t_1) \\
&\overset{(iii)}{=} A(x)f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n f(t_n).
\end{aligned}$$

□

Das Lemma über partielle Summation wurde an dieser Stelle bewiesen, um es direkt im nächsten Lemma anwenden zu können. Es wird dazu benötigt, die Funktion $\Phi(s)$ als ein von $\theta(x)$ abhängiges Integral darzustellen.

Lemma 9. *Es gilt*

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty \frac{\theta(e^t)}{e^{st}} dt \quad \text{für Re } s > 1.$$

Beweis. Sei Re $s > 1$ und p_n die n-te Primzahl. Wir wenden Partielle Summation auf $t_n = p_n$, $a_n = \log p_n$ und $f(t) = \frac{1}{t^s}$ an. Für $x > 0$ ist damit

$$A(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ t_n \leq x}} a_n = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log p = \theta(x)$$

und es gilt:

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^s} = \frac{\theta(x)}{x^s} - \int_2^x \theta(u)(u^{-s})' du.$$

Lässt man x gegen Unendlich laufen, so konvergiert die Summe links gegen $\Phi(s)$, während das Integral rechts gegen $s \int_2^\infty \frac{\theta(u)}{u^{s+1}} du$ konvergiert. Der Quotient $\frac{\theta(x)}{x^s}$ läuft gegen 0, da für Re $s \geq 1 + \delta$ aus Lemma 1

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{\theta(x)}{x^s} \right| \leq \lim_{x \to \infty} \frac{2x \log 2}{x^{Res}} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{2 \log 2}{x^\delta} = 0$$

folgt. Somit ergibt sich

$$\Phi(s) = s \int_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^{s+1}} du$$

(beachte $\theta(u) = 0$ für $u < 2$) und mittels der Substitution $u = e^t$ erhalten wir

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty \frac{\theta(e^t)}{e^{st}} dt.$$

□

Das nachfolgede Lemma stellt ohne Zweifel den Kern des gesamten Beweises dar. Wir werden zunächt zeigen, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind, um das Newman-Ingham Theorem anzuwenden. Indem wir das besagte Theorem anwenden, folgt unmittelbar die Konvergenz des in der Behauptung stehenden Integrals. Ist das Lemma bewiesen, erweist sich der weitere Weg bis zur Aussage des Primzahlsatzes als nicht mehr weit.

Lemma 10. *Das Integral* $\int_1^\infty \frac{\theta(x)-x}{x^2} dx$ *konvergiert.*

Beweis. Nach Lemma 7 ist $g(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$ holomorph auf einer offenen Obermenge von $\operatorname{Re} z \geq 0$. Lemma 9 und $\int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$ ergeben

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty \frac{\theta(e^t)}{e^{(z+1)t}} dt - \frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}(\theta(e^t)e^{-t}) dt - \int_0^\infty e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt}(\theta(e^t)e^{-t} - 1) dt. \end{aligned}$$

Aus Lemma 1 folgt $0 \leq \frac{\theta(e^t)}{e^t} < 2\log 2$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ und damit die Beschränktheit von $f(t) := \theta(e^t)e^{-t} - 1$.
Nun können wir das Newman-Ingham Theorem anwenden (siehe Abschnitt 3.3) und erhalten die Konvergenz von

$$g(0) = \int_0^\infty f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\theta(e^t) - e^t}{e^t} dt = \int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$$

mittels Substitution $e^t = x$. □

Wir besitzen nun indirekt Informationen über das Verhalten von $\theta(x)$ bei $x \to \infty$. Dies gilt es jetzt in die folgende, präzisere Aussage zu übertragen.

Lemma 11. *Es gilt die asyptotische Äquivalenz*

$$\theta(x) \sim x$$

Beweis. Es ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$ zu zeigen. Nehmen wir hierfür zunächst an, es würde $\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} > 1$ gelten. Dann lässt sich ein festes $\lambda \in (1, \limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x})$ wählen, wodurch das Integral $\int_1^\lambda \frac{\lambda-u}{u^2} du$ gegen einen positiven Wert konvergiert.
Nach Lemma 10 existiert dann eine Schranke $R > 0$ sodass

$$\int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du > \left| \int_x^\infty \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \right|$$

für alle $x \geq R$. Wegen $\lambda < \limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$ muss es ein festes $k \geq R$ mit $\lambda < \frac{\theta(k)}{k}$ geben. Da $\theta(x)$ monoton steigt, gilt weiter $\lambda k < \theta(x)$ für $x \geq k$.
Hiermit ergibt sich der Widerspruch:

$$\int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} \, du > \left| \int_k^{\lambda k} \frac{\theta(t) - t}{t^2} \, dt \right| \geq \int_k^{\lambda k} \frac{\lambda k - t}{t^2} \, dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} \, du.$$

Wäre hingegen $\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} < 1$, so ließe sich $\lambda \in \left(\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}, 1\right)$ wählen.
Nach Voraussetzung existiert dann eine Schranke $R > 0$, sodass

$$\left| \int_{\lambda x}^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} \, dt \right| < \left| \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} \, du \right| \tag{12}$$

für alle $x \geq \frac{R}{\lambda}$. Wegen $\lambda > \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}$, existiert ein $k \geq \frac{R}{\lambda}$ mit $\lambda > \frac{\theta(k)}{k}$. Da $\theta(x)$ monoton steigt, folgt $\lambda k \geq \theta(x)$ für alle $x \leq k$.
Damit gilt

$$\int_{\lambda k}^k \frac{\theta(t) - t}{t^2} \, dt \leq \int_{\lambda k}^k \frac{\lambda k - t}{t^2} \, dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} \, du < 0$$

und wir erhalten

$$\left| \int_{\lambda k}^k \frac{\theta(t) - t}{t^2} \, dt \right| \geq \left| \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} \, du \right|$$

was ein Widerspruch zu (12) darstellt. □

4.3 Der Primzahlsatz

Nun sind die Vorbereitungen abgeschlossen und wir können mit der Information $\theta(x) \sim x$ den Primzahlsatz beweisen. Auch wenn sich dieser letzte Schritt als kurz erweist, sei dennoch an die Vorbereitung erinnert, die bisher nötig war.

Satz 1 (Der Primzahlsatz)**.** *Es gilt*

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}}$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} = 1$$

gilt. Wegen

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq x}} \log p \leq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq x}} \log x = \pi(x)\log(x)$$

und Lemma 11 ist einerseits

$$1 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x}. \tag{13}$$

Andererseits erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$

$$\theta(x) \geq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ x^{1-\varepsilon}<p\leq x}} \log p \geq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ x^{1-\varepsilon}<p\leq x}} \log x^{1-\varepsilon} = (1-\varepsilon)\log x[\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})]$$

und somit

$$1 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq (1-\varepsilon)\limsup_{x\to\infty}[\pi(x)\frac{\log x}{x} - \pi(x^{1-\varepsilon})\frac{\log x}{x}].$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x^{1-\varepsilon})\frac{\log x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} x^{1-\varepsilon}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = 0$$

folgt nun

$$\limsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Zusammen mit (13) ergibt sich schließlich

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} = 1$$

und der Primzahlsatz ist bewiesen. □

5 Satz von Tschebyschow

Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, war der Satz von Tschebyschow über lange Zeit das beste Resultat in Bezug auf den Primzahlsatz. Er besagt, dass der Term $\pi(x)\frac{\log x}{x}$ für $x \to \infty$ beschränkt ist. Es ist ersichtlich, dass diese Aussage sofort aus dem Primzahlsatz gefolgert werden kann.
Da der Primzahlsatz sowohl historisch, als auch in dieser Arbeit, bereits bewiesen ist, erscheint ein vollständig neuer Beweis dieser Aussage zunächst als wenig sinnvoll. Dennoch kann dieses Kapitel gänzlich andere Verfahren und Herangehensweisen aufzeigen, um sich dem Primzahlsatz zu nähern. Außerdem wird es benötigt, in Abschnitt 5.1 ein Resultat zu zeigen, welches bereits in der Einleitung erwähnt wurde. Anders als der Primzahlsatz, ist diese Aussage vollständig mit elementaren Mitteln beweisbar und benötigt in dieser Arbeit nur ein einziges Lemma als Vorbereitung.

Lemma 12. *Sei $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung des mittleren Binomialkoeffizienten, so gilt*

$$p_i^{\alpha_i} \leq 2n \quad \textit{für alle } i \leq r.$$

Beweis. Sei p eine Primzahl, die mit der Potenz α den Binomialkoeffizienten

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)}{1} \cdot \frac{(n+2)}{2} \cdots \frac{2n}{n} \tag{14}$$

teilt. Es ist $p^\alpha \leq 2n$ zu zeigen.
Schreibt man $\binom{2n}{n}$ als Bruch wie in (14), so befinden sich im Zähler und Nenner jeweils n aufeinander folgende Zahlen. Es ist ersichtlich, dass von den Zahlen im Zähler höchstens eine mehr als im Nenner von p geteilt wird. Jede p-te dieser Zahlen ist nochmals durch p teilbar und kommt im Zähler wiederum höchstens ein mal mehr vor.
Diese Beobachtung lässt sich bis zu einer Potenz p^m fortsetzen, die keine der Zahlen über dem Bruchstrich mehr teilt. Da jede Zahl von 1 bis $2n$ mindestens eine Zahl im Zähler teilt, muss

$$p^m > 2n \quad \text{und} \quad p^{m-1} \leq 2n \tag{15}$$

gelten. Alle höheren Potenzen von p teilen $\binom{2n}{n}$ ebenfalls nicht.
Wir wissen, dass die Zahlen im Zähler von (14) jeweils maximal ein mal mehr von $p, p^2, \dots, p^{m-1}$ geteilt werden, als die Zahlen im Nenner.
Betrachten wir zuerst alle Zahlen in Zähler und Nenner, die von p^{m-1} geteilt werden. „Streichen“ wir ihnen jeweils den Faktor p (im Sinne von Teilen), so tun wir dies entweder im Zähler und Nenner genau gleich oft oder es geschieht im Zähler ein mal mehr.
Das selbe tun wir auch für alle niedrigeren Potenzen $p^{m-2}, \dots, p$ und stellen fest, dass wir jeweils den Faktor p im Zähler höchstens ein mal mehr wegstreichen. Haben wir dies getan, ist keine der Zahlen in Zähler und Nenner mehr durch p teilbar.
Insgesamt haben wir p im Zähler höchsten $(m-1)$-mal häufiger weggestrichen als im Nenner. Der Bruch in (14) ist daher höchstens $(m-1)$-mal durch p teilbar. Es lässt sich also $\alpha \leq m-1$ schreiben.
Zusammen mit (15) folgt $p^\alpha \leq p^{m-1} \leq 2n$, was zu zeigen war. □

Satz 2 (Satz von Tschebyschow)**.** *Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, sodass*

$$C_1 \frac{n}{\log n} < \pi(n) < C_2 \frac{n}{\log n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Beweis. Zuerst werden wir die zweite Ungleichung $\pi(n) < C_2 \frac{n}{\log n}$ beweisen, welche etwas leichter zu zeigen ist. Für eine natürliche Zahl $x \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\theta(x) &\geq \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ \sqrt{x} < p \leq x}} \log p \\ &\geq (\pi(x) - \pi(\sqrt{x})) \log \sqrt{x} \\ &\geq \pi(x) \log \sqrt{x} - \sqrt{x} \log \sqrt{x}\end{aligned}$$

wegen $\sqrt{x} \geq \pi(\sqrt{x})$. Da wir x größer gleich 2 gewählt haben, ist $\log \sqrt{x} \neq 0$ und wir können die Ungleichung umformen zu

$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{\log \sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

Wegen $\log \sqrt{x} < \sqrt{x}$ ist der zweite Summand $\sqrt{x} < \frac{x}{\log \sqrt{x}}$. Den ersten Summanden können wir mit $\theta(x) < 2x \log 2$ (Lemma 1) nach oben abschätzen und erhalten

$$\pi(x) < \frac{2x \log 2 + x}{\log \sqrt{x}} = (4 \log 2 + 2) \frac{x}{\log x}.$$

Mit $C_2 := 4 \log 2 + 2$ ergibt sich zunächst die zweite Ungleichung der Behauptung. Nun werden wir die erste Ungleichung $C_1 \frac{n}{\log n} < \pi(n)$ beweisen. Hier genügt es zu zeigen, dass

$$\theta(n) > C_1 \cdot n \tag{16}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen

$$\theta(n) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq n}} \log p \leq \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq n}} \log n = \pi(n) \log n$$

würde hieraus

$$\pi(n) \geq \frac{\theta(n)}{\log n} > C_1 \frac{n}{\log n}$$

und somit die Behauptung folgen.
Zunächst versuchen wir eine Abschätzung für den mittleren Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ zu finden. Hierfür zerlegen wir ihn in seine Primfaktoren $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{P}$.
Als erstes betrachten wir alle Primfaktoren $p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i = 1$ und nennen ihr Produkt P_1. Wegen Lemma 12 ($p^\alpha \leq 2n$) kann dieses Produkt P_1 nach oben mit dem Produkt über alle Primzahlen $p < 2n$ abgeschätzt werden, d.h.

$$P_1 \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p < 2n}} p = \exp(\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p < 2n}} \log p) = e^{\theta(2n)}. \tag{17}$$

Betrachten wir jetzt alle Primfaktoren höherer Potenz. Das Produkt dieser Primfaktoren $p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \geq 2$ nennen wir P_2. Auch P_2 wollen wir nach oben abschätzen und wissen aus Lemma 12, dass seine Faktoren kleiner als $2n$ sind. Durch $p_i^{\alpha_i} < 2n$ und $\alpha_i \geq 2$ folgt die Ungleichung $p_i < \sqrt{2n}$.
Es kann also höchstens $\sqrt{2n}$ verschiedene Primfaktoren mit $\alpha_i \geq 2$ geben. P_2 besitzt daher maximal $\sqrt{2n}$ verschiedene Faktoren, welche alle kleiner als $2n$ sind, d.h. $P_2 < (2n)^{\sqrt{2n}}$. Zusammen mit (17) ergibt sich

$$\binom{2n}{n} = P_1 \cdot P_2 < e^{\theta(2n)}(2n)^{\sqrt{2n}}.$$

Schätzen wir $\binom{2n}{n}$ nach unten ab

$$2^n \leq \underbrace{\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdots \frac{2n}{n}}_{\text{alle } \geq 2} = \binom{2n}{n}$$

und verbinden beide Abschätzungen, so erhalten wir

$$2^n < e^{\theta(2n)}(2n)^{\sqrt{2n}}$$

Durch Anwendung des Logarithmus folgt

$$n \log 2 < \theta(2n) + \sqrt{2n} \log 2n$$

und somit

$$\theta(2n) > n \cdot \left(\log 2 - \frac{\sqrt{2} \log 2n}{\sqrt{n}} \right).$$

Mit den Regeln von L'Hospital lässt sich $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\log 2n}{\sqrt{n}} = 0$ zeigen. Damit existiert eine Schranke $T > 2$, sodass

$$\frac{\sqrt{2} \log 2n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \log 2$$

für alle $n > T$ gilt. Wir erhalten also

$$\theta(2n) > n \cdot \frac{\log 2}{2}$$

Für $n > T$ gerade ist

$$\theta(n) = \theta(2 \cdot \frac{n}{2}) > \left(\frac{n}{2}\right) \frac{\log 2}{2}$$

Für $n > T$ ungerade ist $n - 1$ gerade und damit

$$\theta(n) \geq \theta(n-1) > \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{\log 2}{2}$$

In beiden Fällen gilt $\theta(n) > \left(\frac{n}{4}\right) \frac{\log 2}{2}$. Wähle $C_0 > 0$ so, dass $\theta(n) > C_0 \cdot n$ für alle $n \leq T$ erfüllt ist. Mit $C_1 := \min\{C_0, \frac{\log 2}{8}\}$ ergibt sich (16) für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die erste Ungleichung der Behauptung nun ebenfalls bewiesen ist. □

5.1 $\sum \frac{1}{p}$ divergiert

Diese Behauptung konnte erstmals von Euler bewiesen werden. Dass sich die Aussage aus dem Satz von Tschebyschow folgern lässt, konnte ich zufällig bei der Arbeit mit dem eben genannten Satz zeigen. Es soll daher der letzte Beweis dieser Arbeit sein.

Korollar 1. *Die Summe über den Kehrwert aller Primzahlen* $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ *divergiert.*

Beweis. Sei p_n die n-te Primzahl. Nach dem Satz von Tschebyschow gilt

$$C_1 \frac{p_n}{\log p_n} < \pi(p_n)$$

mit einer Konstanten $C_1 > 0$ und wegen $\pi(p_n) = n$ folgt

$$C_1 p_n < n \log p_n. \tag{18}$$

Nun ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{\sqrt{p_n}} = 0$, es muss also ein $N_0 \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\frac{\log p_n}{\sqrt{p_n}} < C_1$ für alle $n > N_0$. Mit (18) folgt für alle $n > N_0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\log p_n}{\sqrt{p_n}} < C_1 < \frac{n \log p_n}{p_n} \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{p_n}} < \frac{n}{p_n} \\
\Rightarrow\ & p_n < n^2 \\
\Rightarrow\ & \log p_n < 2 \log n
\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich Abschätzung (18) für alle $n > N_0$ fortsetzen zu

$$C_1 p_n < n 2 \log n.$$

Sei $T \in \mathbb{N}$ mit $T > N_0$. Da $g(n) = \frac{1}{n \log n}$ streng monoton fällt, folgt

$$\frac{2}{C_1} \sum_{n=N_0}^{T} \frac{1}{p_n} > \sum_{n=N_0}^{T} \frac{1}{n \log n} > \int_{N_0}^{T} \frac{dx}{x \log x} = \log\log T - \log\log N_0$$

und durch Grenzübergang $T \to \infty$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

Literatur

[1] AVANZI, R.: *Eine moderne Einführung in die klassische Zahlentheorie*, Stand: 9. September 2008, Ruhr-Universität Bochum, [URL: http://caccioppoli.mac.rub.de/website/teachingmaterial/zt-ss08/zt.pdf] (abgerufen am 13. Juli 2010)

[2] BUNDSCHUH, P.: *Einführung in die Zahlentheorie*, 3. Auflage, Springer Verlag (1996)

[3] FISCHER, W. und LIEB, I.: *Einführung in die komplexe Analysis*, Elemente der Funktionentheorie, Vieweg u. Taubner Verlag (2010)

[4] FORSTER, O.: *Zeta-Funktion und Euler-Produkt*, Stand: 12. November 2009, [URL: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/zeta/RZF_chap01.pdf] (abgerufen am 13. Juli 2010)

[5] JAMESON, G.J.O.: *The Prime Number Theorem*, Cambridge Univ. Press (2004)

[6] NEWMAN, D.J.: *Analytic Number Theory*, Graduate texts in mathematics, Springer Verlag (1998)

[7] ZAGIER, D.: *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*, Stand: Oktober 1997, The American Mathematical Monthly [URL: http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Chauvenet/Zagier.pdf] (abgerufen am 13. Juli 2010)

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort / Datum   Unterschrift