

Masterarbeit

Aufbau und Erprobung eines Versuches zu spektroskopischen
Untersuchungen mit dem Michelson-Interferometer

Jan Kehlbeck

Oktober 2014

Bremen

Aufbau und Erprobung eines Versuches zu spektroskopischen Untersuchungen mit dem Michelson-Interferometer

Masterarbeit

vorgelegt von

B. Sc. Jan Kehlbeck

Erstgutachter: Prof. Dr. I. Rückmann

Zweitgutachter: Prof. Dr. H. Schecker

vorgelegt am 27.10.2014

Universität Bremen
Fachbereich 1

*Alles, was man tun muss, ist, die richtige Taste
zum richtigen Zeitpunkt zu treffen.*

Johann Sebastian Bach,
(1685-1750)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Entstehung des Interferometers und Stand der Technik	3
3	Theoretische Grundlagen	6
3.1	Ebene elektromagnetische Wellen	6
3.2	Kohärenz	7
3.3	Schwebung	8
3.4	Linienverbreiterungsmechanismen und Linienprofile	10
3.5	Aufbau, Funktion und Interferenzmuster des Michelson-Interferometers	15
3.6	Interferogramme und Kontrastfunktionen zweier Linienprofile	21
3.7	Fourier-Transformation	26
3.8	Brechzahlbestimmung von Glas	27
4	Experimenteller Aufbau	29
4.1	Aufbau des Versuchsplatzes	29
4.2	Beschreibung der einzelnen Bauteile	31
5	Grundlegende Messungen und Kalibrierungen	38
5.1	Spektrum und Polarisation des He-Ne-Lasers	38
5.2	Interferenzringe mit dem He-Ne-Lasers	41
5.3	Kalibrierungskurven des Piezoverstellers	42
5.4	Spektren der LEDs und Interferenzfilter	44
6	Darstellung der Ergebnisse und Diskussion	47
6.1	Messverfahren	47
6.2	Versuchsaufbau und Justage	47
6.3	Spektrale Untersuchung des Ringsystems einer roten und weißen LED im MI	49
6.4	Interferogramme und Spektren	52
6.5	Doppellinie der Natriumdampfampe	62
6.6	Moden des grünen Lasers	65
6.7	Brechungsindex einer Glasplatte	70
7	Das Michelson-Interferometer im Schulgerätepraktikum	73
7.1	Einordnung in den Bremer Bildungsplan und in das Kerncurriculum	73
7.2	Mögliche Realisierungen eines Interferometeraufbaus	75
8	Zusammenfassung	77
	Literaturverzeichnis	80
	Abbildungsverzeichnis	83
	Tabellenverzeichnis	88
	Selbstständigkeitserklärung	89
	Anhang	90

1 Einleitung

Das von Albert Abraham Michelson 1881 entwickelte Michelson-Interferometer gab den Anstoß für die Entwicklung zahlreicher Interferometer mit deren Hilfe eine Vielzahl spektroskopischer Untersuchungen möglich wurden. Das Interferometer ist heute ein wichtiges Instrument bei der Forschungsarbeit in der Physik, Chemie, Biologie, Geologie und den Ingenieurwissenschaften. So ist das Michelson-Interferometer ein sehr präzises Instrument zur Messung kleinster Längenänderungen und findet in der aktuellen Forschung, z. B. im Bereich der Gravitationswellendetektion, Anwendung. Die dort verwendeten Interferometer stellen hohe Anforderungen an die verwendeten technischen Bauteile. Als Lichtquelle werden heute Laser verwendet, die als quasimonochromatische Lichtquellen betrachtet werden können und aufgrund ihrer großen Kohärenzlänge für den Einsatz im Interferometer hervorragend geeignet sind. Spezielle Formen und Weiterentwicklungen des Michelson-Interferometers sind z. B. das Mach-Zehnder- Interferometer zur Untersuchung fundamentaler quantenmechanischer Effekte oder das Sagnac-Interferometer mit dessen Hilfe Rotationen absolut gemessen werden können.

Das physikalische Praktikum der Universität Bremen bietet den Studentinnen und Studenten zwischen dem fünften und achten Semester ein auf das Grundpraktikum aufbauendes Fortgeschrittenenpraktikum an. In diesem Praktikum können die Studentinnen und Studenten aus einer Vielzahl von umfangreichen Versuchen zu den einzelnen Teilgebieten der Physik wählen und diese selbstständig durchführen. Im Themenbereich der Optik ist der Versuch zu den Grundlagen des Michelson-Interferometers ein wesentlicher Bestandteil und wurde bisher mit einem älteren Aufbau und sehr eingeschränkten Aufgabenstellungen realisiert. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird unter Verwendung eines neu angeschafften Schienen- und Reitersystems der Firma PI-miCos ein neuer, deutlich kompakterer Versuchsplatz für das Michelson-Interferometer aufgebaut und verschiedene neue Aufgabenstellungen erprobt und weiterentwickelt. Kern der Aufgabenstellungen ist die spektroskopische Untersuchung verschiedener Lichtquellen.

Im zweiten Kapitel wird auf die Entwicklung des Michelson-Interferometers und dessen Bedeutung in der heutigen wissenschaftlichen Praxis eingegangen. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die Nutzung des Interferometers als Aufbau zum Nachweis von Gravitationswellen gelegt.

Im dritten Kapitel werden die Grundlagen zum Verständnis der Funktionsweise des Interferometers sowie der spektroskopischen Untersuchungen behandelt. Dazu gehört einleitend die theoretische Herleitung elektromagnetischer Wellen, die allgemeine Beschreibung von Kohärenz und Schwebungseffekten und die Mechanismen zur Linienverbreiterung einer Lichtquelle. Anschließend werden der prinzipielle Aufbau und die Funktion des Michelson-Interferometers beschrieben und die zu beobachtenden Interferenzerscheinungen in der Theorie behandelt. Es folgen die für die Messungen relevanten theoretischen Hintergründe zur Beschreibung der Interferogramme und der Kontrastfunktion sowie der Fouriertransformation. Abschließend wird die Theorie zur Messung der Brechzahl transparenter Medien betrachtet.

Im vierten Kapitel werden der experimentelle Aufbau und die verwendeten mikrooptischen Komponenten beschrieben. Im Zentrum stehen dabei die Planung, Umsetzung und Verbesserung des experimentellen Aufbaus in Hinblick auf die späteren Messungen. Neben dem Vorgehen zur Justage des Aufbaus werden wichtige Eigenschaften der Komponenten und Hinweise bei der Handhabung erläutert. Eine besondere Rolle kommt dabei der Beschreibung des Piezoverstellers sowie die theoretischen Grundlagen zum piezoelektrischen Effekt und den Hystereseeffekten zu.

Im fünften Kapitel werden die grundlegenden Messungen zu den Eigenschaften des Interferometers und speziell der verwendeten Lichtquellen durchgeführt. Zu den Messungen gehört u. a. die Aufnahme des Spektrums des He-Ne-Lasers und die Änderung der Polarisations Ebenen des Laserlichts im Interferometer, die Kalibrierungskurven des Piezoverstellers im geregelten und ungeregelten Modus und die Spektren der roten und weißen LED sowie die Transmissionspektren von drei Interferenzfiltern und deren charakteristischen Merkmalen.

Im sechsten Kapitel werden das Messverfahren zur Aufnahme der Interferogramme erläutert und die Messergebnisse diskutiert. Aus den Interferogrammen und deren Einhüllenden wird über die $1/e$ -Breite auf die Kohärenzlänge der jeweiligen Lichtquelle geschlossen. Ebenso lassen sich charakteristische Merkmale der Spektren der Lichtquellen über die Interferogramme ableiten. Die Ergebnisse werden anschließend mit denen der gemessenen Spektren verglichen und diskutiert. In einem weiteren Schritt werden über die Schwebungen im Kontrastverlauf einer Natriumdampflampe der Abstand der Na-D-Linien bestimmt und die Axial-Moden eines grünen Halbleiterlasers untersucht. Abschließend wird der Brechungsindex einer Glasplatte mit dem Interferometer bestimmt.

Im letzten Kapitel werden die Bedeutung des Michelson-Interferometers in Hinblick auf die Vorgaben der Lehrpläne des Faches Physik in den Ländern Bremen und Niedersachsen analysiert sowie die Möglichkeiten zu einer sinnstiftenden Realisierung eines Interferometerversuchs im Rahmen eines Schülerlabors und der Schule erörtert.

2 Entstehung des Interferometers und Stand der Technik

Das Michelson-Interferometer ist nach dem Amerikaner Albert A. Michelson (1852-1931) benannt. Der in Preußen geborene und in frühen Jahren in die USA immigrierte Michelson wiederlegte in Zusammenarbeit mit Edward W. Morley im sog. Michelson-Morley-Experiment (publiziert 1887) die damals vorherrschende Äthertheorie.

Wesentlicher Bestandteil des Michelson-Morley-Experiments war ein von Michelson 1881 in Potsdam entwickeltes und realisiertes Interferometer, welches später den Namen Michelson-Interferometer bekam. Dieses bestand aus einer Lichtquelle (Natrium-Lampe), deren Licht durch einen halbdurchlässigen Silberspiegel in zwei Strahlen entlang zweier Interferometerarme aufgeteilt wurde. Die beiden Teilstrahlen wurden am Ende der Arme von zwei Spiegeln reflektiert und wieder zusammengeführt. Die Interferenz der Teilstrahlen erzeugte ein Streifensystem, dessen Abstand vom Laufzeitunterschied des Lichts in den Interferometerarmen abhing. Der durch den Äther postulierte Laufzeitunterschied in Bezug auf die Bewegung der Erde konnte jedoch nicht nachgewiesen werden. Im Jahre 1907 erhielt Michelson den Physik Nobelpreis „für seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Untersuchungen“¹.

Neben dem ursprünglichen Nutzen des Interferometers als Instrument zur Falsifizierung der Äthertheorie, ist der Aufbau des Michelson-Interferometers ein hochpräzises Instrument zur interferometrischen Untersuchung von Schichtdicken, Brechzahlen und Längenänderungen. Eine besondere Bedeutung kommt jedoch der Möglichkeit zu mit dem Interferometer Licht spektroskopisch untersuchen zu können. Im Gegensatz zu dispersiv oder diffraktiv arbeitenden Spektrometern, welche wellenlängenselektiv Intensitäten messen und das Spektrum aufnehmen, wird beim Michelson-Interferometer das Spektrum einer Lichtquelle über das Interferogramm berechnet. Zudem spielt im Interferometer die Transmissionsfähigkeit der optischen Elemente in bestimmten Spektralbereichen keine Rolle.

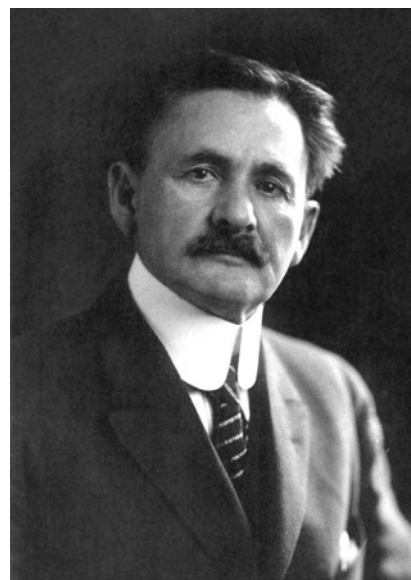


Abb. 1: Albert Abraham Michelson (1852-1931).

FTIR-Spektrometer

Das FTIR-Spektrometer (Fourier-Transformations-Infrarotspektrometer) ist eine spezielle Form des Interferometers und dient u. a. zur Untersuchung von Infrarotspektren. Eine mögliche Variante des Aufbaus dieses Interferometers ist das Michelson-Interferometer. Die Spektren werden über die Fouriertransformierte des gemessenen Interferogramms berechnet. Mit Hilfe der FTIR-Spektroskopie können die in Molekülen angeregten Energiezustände über die resultierenden Emissionsspektren gemessen werden. Die Probe wird dabei mit Infrarotstrahlung angeregt, welche energetisch im Bereich der Schwingungs- und Rotationsniveaus der Molekülverbindung liegt. Die absorbierte Strahlung führt zu einer Anregung dieser Niveaus

¹siehe: Liste der Nobelpreisträger für Physik [22]

des Moleküls und erzeugt ein für jede Substanz charakteristisches Spektrum. Die FTIR-Spektrometer werden zum Teil im Vakuum und Hochvakuum betrieben, um resultierende Störbanden der in der Luft enthaltenen Gase, wie CO₂ oder Wasserdampf, zu vermeiden. Zudem müssen im FTIR-Spektrometer speziell für den Infrarotbereich geeignete optische Bauteile verwendet werden. Optische Elemente wie Linsen und Prismen eines klassischen Spektrometers haben Absorptionsbanden im IR-Bereich und sind für IR-Licht undurchlässig.

Das Spektrometer eignet sich daher für die Identifikation verschiedenster Substanzen und ist ein wichtiges Instrument in der Physik, Chemie, Biologie und Geologie zur Bestimmung molekularer Verbindungen und Strukturen anorganischer und organischer Stoffe. In der Geologie kommen sog. FTIR-Spektrometer-Handgeräte zum Einsatz, welche eine chemische Analyse von Gesteinen und Mineralien in Echtzeit ermöglichen. In der Umweltphysik wird die FTIR-Spektroskopie genutzt um mit Hilfe des Sonnen- oder Mondlichts die Absorptionsspektren der Atmosphäre zu messen. Das IUP (Institute of Environmental Physics) der Universität Bremen besitzt ein solches Spektrometer, mit dem die in der Erdatmosphäre enthaltenen Spurengase, wie Chlorwasserstoff, Salpetersäure oder Ozon, in der Stratosphäre in extrem geringen Konzentrationen nachgewiesen werden können.

Anwendung in der Industrie

Ebenso werden FTIR-Spektrometer in der Industrie genutzt um in Rauchgasen, z. B. aus Kraftwerken oder Abgasen aus Motoren auf ihre Bestandteile zu analysieren. Eine weitere Anwendung ist die interferometrische Entfernungsmessung, die minimale Weglängenänderungen im μm -Bereich, z. B. bei Schwingungsprozessen eines Maschinenteils auflösen kann. Darüber hinaus werden interferometrische Messverfahren genutzt, um Oberflächen auf ihre Struktur hin zu prüfen. Es wird dabei ausgenutzt, dass die Wellenfronten der an einer Oberfläche reflektierten Welle durch diese verformt werden und sich auf das Interferenzbild übertragen.²

Detektion von Gravitationswellen

Das Michelson-Interferometer kann als Instrument zum Nachweis von Gravitationswellen genutzt werden. Es wird dabei die Eigenschaft des Interferometers ausgenutzt kleinste Längenänderungen messbar zu machen. Albert Einstein postulierte 1918 im Zuge seiner Relativitätstheorie die Existenz von Gravitationswellen. Diese können theoretisch bei Supernovae sowie bei der Vereinigung massiver Neutronensterne oder Schwarzer Löcher erzeugt werden. Die Wellen verursachen eine Krümmung der Raumzeit, welche sich in einem Interferometer als minimale Abstandsänderung der Interferometerarme äußert und einen Laufzeitunterschied des Lichts zur Folge haben würde.

Nahe Hannover steht der Gravitationswellen-Detektor *GEO600*, mit dessen Hilfe seit 2005/06 versucht wird die Existenz von Gravitationswellen zu bestätigen. Die Interferometerarme des Detektors besitzen eine Länge von je 600 m.³ Die größte Schwierigkeit besteht allerdings darin Störungen, wie seismische Aktivitäten oder Temperaturschwankungen, die ein mögliches

²vgl.: P. Profos, T. Pfeifer (1994) [14], S.463ff

³siehe: Homepage des Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute) [20]

Messignal überdecken könnten, zu neutralisieren. Eine größere Version des GEO600 ist der Gravitationswellen-Detektor *VIRGO* in Italien, dessen Interferometer eine Armlänge von 3 km besitzt und durch Mehrfachreflektion auf eine effektive optische Weglänge von bis zu 100 km erhöht werden kann.⁴ Bisher konnten jedoch keine Gravitationswellen mit den jetzigen Detektoren nachgewiesen werden.

In naher Zukunft ist das sog. *Evolved Laser Interferometer Space Antenna*, kurz eLISA, geplant. Das eLISA-System besteht aus drei Raumsonden, die eine Interferometeranordnung mit einer Armlänge in der Größenordnung von 10^6 km aufspannen. Trifft eine Gravitationswelle auf das Satellitensystem, sollen relative Längenänderungen $l/\Delta l$ zwischen 10^{-19} und 10^{-23} nachweisbar sein können.⁵ Die höchste Empfindlichkeit von eLISA würde in einem Frequenzbereich von 0,1 mHz bis 1 Hz liegen, was einer Wellenlänge der Gravitationswellen in der Größenordnung von 10^8 bis 10^{12} m entspräche.

⁴siehe: Homepage des European Gravitational Observatory (EGO) [23]

⁵vgl.: Forschungszentrum der Bundesrepublik Deutschland für Luft- und Raumfahrt (DLR) [21]

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Ebene elektromagnetische Wellen

Die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ einer elektromagnetischen Welle lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen ableiten. Diese haben im ladungs- und stromfreien Vakuum die Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

Wendet man die Rotation auf Gleichung (3.3) an und setzt Gleichung (3.4) anschließend ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit der Graßmann-Identität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E}$ und Gleichung (3.1) vereinfacht sich der Ausdruck zur Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6)$$

wobei $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beschreibt. Betrachtet man nur eine Komponente, beispielsweise in x -Richtung, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Eine Lösung $\mathbf{E}(x,t)$ einer solchen Wellengleichung hat die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{i(kx-\omega t)} + \mathbf{B}e^{-i(kx-\omega t)} \quad (3.8)$$

mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. Für den Fall, dass $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{A}_0$ reelle Vektoren sind, gilt

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{A}_0 \cos(kx - \omega t). \quad (3.9)$$

Setzt man nun für die Amplitude $\mathbf{E}_0 = 2\mathbf{A}_0$, gilt für die ebene Welle der Ausdruck⁶

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t). \quad (3.10)$$

Die Funktion löst die Wellengleichung, falls die Dispersionsrelation $k = \omega/c$ erfüllt ist.

⁶vgl.: W. Demtröder (2009) [3], S.195ff

3.2 Kohärenz

Nach dem Superpositionsprinzip lässt sich die Gesamtfeldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ von mehreren sich überlagernden Wellen \mathbf{E}_i in einem Ort \mathbf{r} als Summe ihrer Amplituden darstellen⁷

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi_n(\mathbf{r}, t)}, \quad (3.11)$$

wobei $\varphi_n(\mathbf{r}, t) = k_n(\mathbf{r} - ct)$ als Phasenfaktor bezeichnet wird. Die Überlagerung solcher Teilwellen heißt Interferenz. Die Gesamtfeldstärke ist nach Gleichung (3.11) von den orts- und zeitabhängigen Amplituden und Phasen der Teilwellen am Ort \mathbf{r} abhängig. Die Interferenzfähigkeit der Teilwellen ist wiederum von der *Kohärenz* der Teilwellen abhängig. So kann eine zeitlich stationäre Interferenzstruktur nur dann beobachtet werden, wenn sich die Phasendifferenzen $\Delta\varphi_n$ zweier beliebiger Teilwellen \mathbf{E}_i und \mathbf{E}_j am Ort $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ während der Beobachtungszeit Δt um weniger als 2π ändern. Solche Teilwellen werden als *zeitlich kohärent* bezeichnet. Gilt diese Bedingung ebenso für zwei beliebige Teilwellen an unterschiedlichen Orten $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$, so sind diese *räumlich kohärent* zueinander.

Die maximale Beobachtungszeit Δt , während der sich die Phasendifferenzen zwischen allen überlagerten Teilwellen \mathbf{E}_i um höchstens 2π ändern, wird als sog. *Kohärenzzeit* $\Delta\tau$ bezeichnet.⁸ Zwischen der Kohärenzzeit und der Linienbreite $\Delta\nu$ der Lichtquelle gilt der Zusammenhang

$$\Delta\tau = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (3.12)$$

Mit der Lichtgeschwindigkeit c ergibt sich für die *Kohärenzlänge*⁹

$$\Delta l = \frac{c}{\Delta\nu}. \quad (3.13)$$

In Abbildung 2 ist die Intensitätsverteilung $I(\lambda)$ einer Spektrallinie mit einem Lorentzprofil

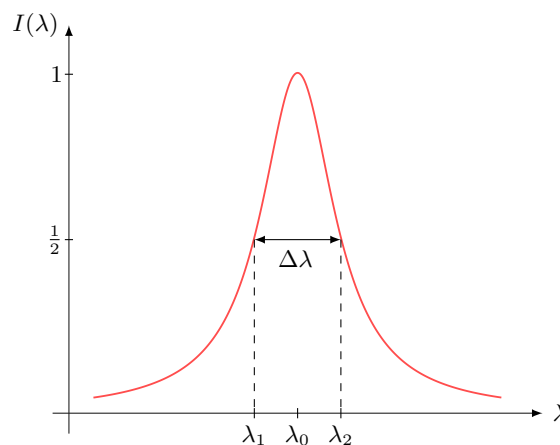


Abb. 2: Lorentzförmige Intensitätsverteilung $I(\lambda)$ einer Lichtquelle mit Halbwertsbreite $\Delta\lambda$.

⁷vgl.: Prof. Dr. U. Keller [11], S.1

⁸vgl.: W. Demtröder (2009) [3], S.307f

⁹Es wird von einem Brechungsindex $n \approx 1$ ausgegangen.

mit der Mittelpunktswellenlänge λ_0 und der Linienbreite $\Delta\lambda$ dargestellt. Für die Linienbreite $\Delta\nu$ folgt

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_2\lambda_1} = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}, \quad (3.14)$$

wobei $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ist. Für $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ kann die Näherung $\lambda_1\lambda_2 \approx \lambda_0^2$ angenommen werden. Für die Kohärenzlänge aus Gleichung (3.13) gilt nach Einsetzen von Gleichung (3.14) in guter Näherung

$$\Delta l \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (3.15)$$

3.3 Schwebung

Eine Schwebung bezeichnet eine Überlagerung zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen ν_1 und ν_2 , wobei diese nahe beieinander liegen. Man betrachte zwei harmonische Schwingungen mit gleicher Amplitude¹⁰

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{A} \sin(\omega_1 t) \\ y_2 &= \tilde{A} \sin(\omega_2 t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt für die Überlagerung beider Schwingungen

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1 + y_2 = \tilde{A} (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) \\ &= 2\tilde{A} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

In Abbildung 3 sind die harmonischen Schwingungen y_1 und y_2 sowie die überlagerte Schwebung dargestellt.

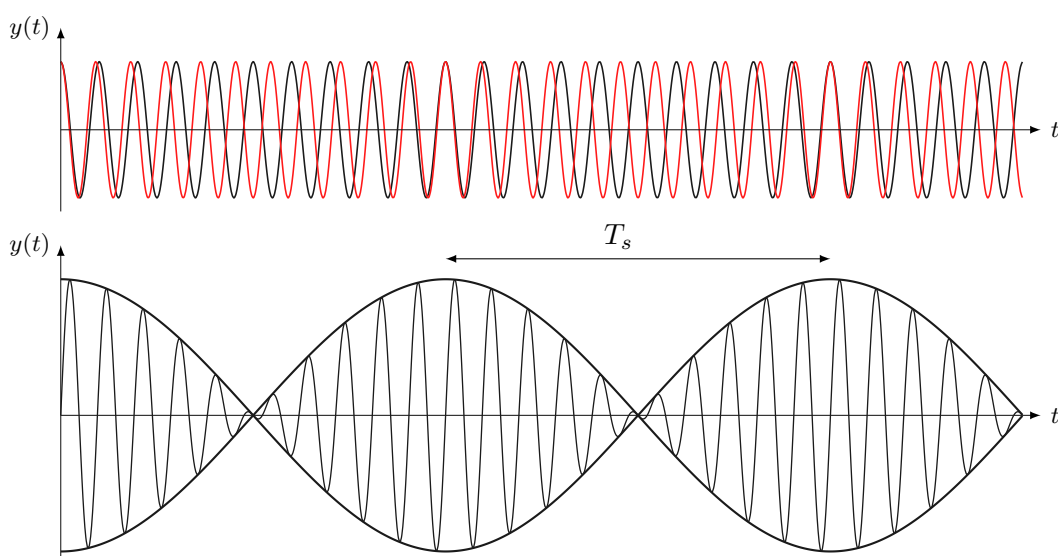


Abb. 3: Zwei Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 (oben). Überlagerte Schwingung mit einhüllendem Kurvenverlauf und eingezeichneter Schwebungsperiode T_s (unten).

¹⁰Für diese Herleitung wird die gängige Kreisfrequenz $\omega_i = 2\pi\nu_i$ gebraucht.

Betrachtet man die räumliche Ausdehnung einer Schwingung, so spricht man von einer Welle. In diesem Fall kann, analog zur Schwebungsperiode T_s bei zwei Schwingungen, die Schwebungswellenlänge λ_s definiert werden. Dazu betrachte man die Schwebungsfrequenz ν_s der Überlagerung mit $\nu_s = |\nu_1 - \nu_2|$. Mit dem Zusammenhang $\lambda = c/\nu$ gilt für die Schwebungswellenlänge λ_s

$$\lambda_s = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (3.18)$$

3.4 Linienverbreiterungsmechanismen und Linienprofile

Bei der Emission von Licht aus angeregten Atomen wird zwischen *homogenen* und *inhomogenen* Verbreiterungsmechanismen unterschieden. Mit homogenen Verbreiterungen, wie der *natürlichen Linienbreite* und der *Stoßverbreiterung*, werden Prozesse bezeichnet, bei denen die Wahrscheinlichkeit für die Emission einer bestimmten Frequenz im ganzen System dieselbe ist. Inhomogene Verbreiterungen, wie die Dopplerverbreiterung, beschreiben dagegen Prozesse mit ungleich verteilten Emissionswahrscheinlichkeiten. Im Folgenden soll auf die wesentlichen Verbreiterungsmechanismen und deren Intensitätsprofile genauer eingegangen werden.

Natürliche Linienverbreitungen und Lorentz-Profil

Bei einem Übergang eines Elektrons zwischen zwei diskreten Energien eines Atoms

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu_0 \quad (3.19)$$

wird im idealisierten Fall ein Photon mit einer diskreten Übergangsfrequenz ν_0 emittiert. In der Realität weist diese Linie jedoch eine gewisse spektrale Breite $\nu_0 \pm \Delta\tilde{\nu}$ auf. Diese wird als *natürliche Linienbreite* $\Delta\nu$ definiert und ist von der Übergangswahrscheinlichkeit bzw. den mittleren Zerfallszeiten τ_i der beteiligten Zustände E_i abhängig. Aus der Energie-Zeit-Unschärferelation folgt

$$\Delta E_i \approx \frac{\hbar}{\tau_i} \quad \longrightarrow \quad \Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right). \quad (3.20)$$

Die Linienform eines Übergangs lässt sich klassisch mit einem gedämpften harmonischen Oszillator der Form¹¹

$$f(t) = C(t)e^{i\omega_0 t} = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{i\omega_0 t} \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (3.21)$$

beschreiben, wobei ω_0 die Zentralfrequenz darstellt. Aus der weiteren Normierung von Gleichung (3.21) mit

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{C^2}{\gamma} = 1 \quad (3.22)$$

ergibt sich der Faktor $C = \sqrt{\gamma}$. Die Fourier-Transformation transformiert die zeitabhängigen Amplituden zu einem von der Frequenz abhängigen komplexen Amplitudenverlauf $A(\omega)$ mit

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{\omega_0 - \omega + i\gamma/2}. \quad (3.23)$$

¹¹vgl.: Bergmann, Schäfer (2003) [1], S.195ff

Die Zerlegung des Ausdrucks in Realteil und Imaginärteil $A(\omega) = B(\omega) + iD(\omega)$ zeigt einen reellen „absorptiven“ und einen komplexen „dispersiven“ Anteil auf.¹²

$$B(\omega) = \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (3.24)$$

$$D(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (3.25)$$

Der Realteil entspricht dabei einem *Lorentz-Profil*. Für den Intensitätsverlauf der normierten Linienform $L(\omega) = A(\omega)A^*(\omega)$ ergibt sich aus Gleichung (3.23) der Ausdruck

$$L(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (3.26)$$

Die Normierung $I(\omega) = I_0 L(\omega)$ auf eine integrale Intensität I_0 gibt lediglich einen zusätzlichen Faktor. Das natürliche Linienprofil entspricht demnach einem Lorentz-Profil (siehe Abbildung 4) mit einer maximalen Intensität von $I(\omega_0) = 2I_0/\pi\gamma$, welches durch die Halbwertsbreite¹³ (FWHM) $\Delta\omega = \gamma$ charakterisiert ist.

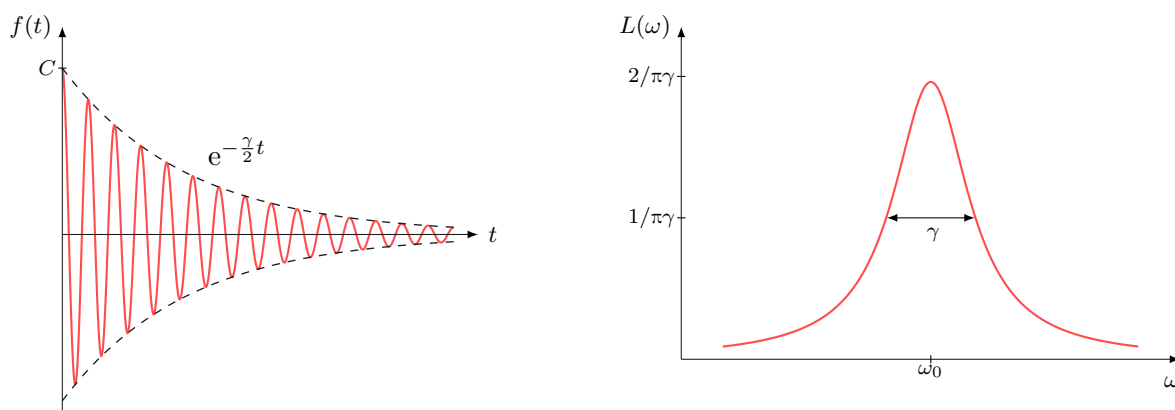


Abb. 4: Abklingende Amplitude des elektrischen Feldes beim Aussenden eines Photons (links). Die Intensität klingt demgemäß mit dem Faktor γ ab. Rechts ist das Lorentzprofil als Fouriertransformierte mit der Halbwertsbreite γ dargestellt.

Für die Halbwertsbreite und die Lebensdauer τ der beteiligten Zustände gilt gemäß Gleichung (3.20) der Zusammenhang

$$\Delta\omega = \gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_j}, \quad (3.27)$$

wobei $\tau_{i,j}$ die Lebensdauern der beteiligten Niveaus darstellen. Für spätere Messungen ist es sinnvoll anstelle der Kreisfrequenz ω die Frequenz ν zu verwenden. Für Gleichung (3.26) gilt dann¹⁴

¹²Der Normierungsfaktor wurde bei der Zerlegung nicht berücksichtigt.

¹³Englisch: Full Width at Half Maximum (FWHM).

¹⁴Die Transformation ins Frequenzmaß ν normiert die integrale Intensität auf $I_0/2\pi$.

$$I(\nu) = \frac{I_0}{4\pi^2} \frac{\Gamma}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (3.28)$$

Der Faktor $\Gamma = \gamma/2\pi$ beschreibt hierbei die Halbwertsbreite des Profils und I_0 die integrale Intensität.¹⁵ Mit Gleichung (3.27) folgt

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (3.29)$$

Dopplerverbreiterung

In einem nicht ruhenden System aus angeregten Atomen, die eine Geschwindigkeitskomponente v_x relativ zum ruhenden Beobachter aufweisen, kommt es aufgrund des Dopplereffekts zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz ω_0 . Abbildung 5 zeigt einen solchen Emittter mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} und einer Komponente in Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} einer ebenen Wellenfront, welche sich in Richtung des Beobachters ausbreitet.

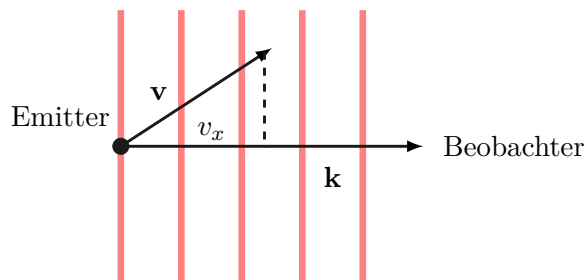


Abb. 5: Geschwindigkeitskomponenten eines Emitters.

Für die detektierte Frequenz am Beobachtungspunkt gilt

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.30)$$

Die x -Komponente von $\tilde{\omega}$ kann mit $\nu = c/\lambda$ umgeformt werden zu

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2\pi\nu} \frac{2\pi}{\lambda} v_x \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c} \right). \quad (3.31)$$

Befinden sich die Atome im thermischen Gleichgewicht, so gilt nach der maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung¹⁶

$$dN = N \sqrt{\frac{m}{2k_B T \pi}} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} v_x^2\right) dv_x \quad (3.32)$$

mit der Anzahl dN der Atome pro Volumeneinheit sowie der Geschwindigkeitskomponenten im Intervall dv_x um v_x . Mittels der Substitution der Geschwindigkeitskomponenten mit

¹⁵vgl.: P. G. Schumann (2005) [15], S.17f

¹⁶vgl.: J. Stenger (2008/2009) [16], S.19f

$d\tilde{\omega}/dv_x = \omega_0/c$ und v_x aus Gleichung (3.31) folgt für Gleichung (3.32) der Zusammenhang

$$dN = N \sqrt{\frac{m}{2k_B T \pi}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T} \frac{(\tilde{\omega} - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right) \frac{c}{\omega_0} d\tilde{\omega}. \quad (3.33)$$

Da die Intensität $I(\omega)d\omega$ proportional zur Anzahl dN der Atome ist, gilt für die auf I_0 normierte, dopplerverbreiterte Linienform

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{mc^2}{2k_B T \pi}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right). \quad (3.34)$$

Das Linienprofil entspricht einer Gaußfunktion, mit der Halbwertsbreite (FWHM)

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{2k_B T \ln(2)}{mc^2}}. \quad (3.35)$$

Gleichung (3.34) kann somit vereinfacht werden zu

$$I(\omega) = \tilde{I}(\omega_0) \exp\left(-\frac{\ln(16)(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) \quad \text{mit} \quad \tilde{I}(\omega_0) = \frac{I_0}{\Delta\omega} \sqrt{\frac{\ln(16)}{\pi}}. \quad (3.36)$$

Die Transformation des Ausdrucks in das Frequenzmaß $\nu = \omega/2\pi$ ist analog zu Gleichung (3.36) und hat folgende Form

$$I(\nu) = I(\nu_0) \exp\left(-\frac{\ln(16)(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu^2}\right). \quad (3.37)$$

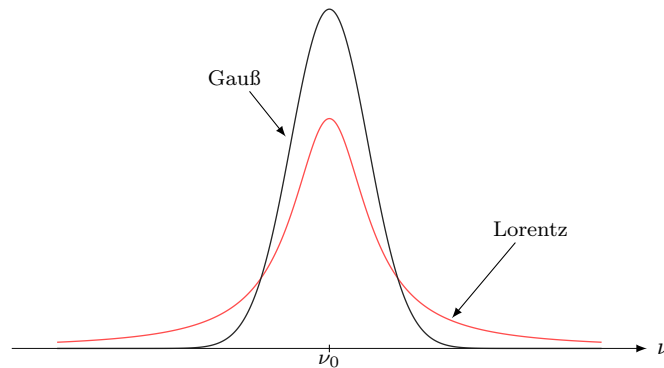


Abb. 6: Vergleich eines Lorentz- und Gauß-Profiles mit gleicher Halbwertsbreite und gleicher integraler Intensität.

Stoßverbreiterung

Neben der natürlichen Linienverbreiterung $\Delta\nu$ führen Wechselwirkungen bzw. Stöße zwischen den Atomen zu einer Verschiebung der Energieniveaus und damit zu einer zusätzlichen Verbreiterung $\Delta\nu_{\text{ges}} = \Delta\nu + \Delta\nu_{\text{st}}$. Die Linienbreite bei Stoßverbreiterung $\Delta\nu_{\text{st}}$ ist abhängig von der Struktur der Elektronenhülle sowie dem Abstand zweier sich stoßender Teilchen. In einem Gasgemisch ist die Stoßrate von der Anzahl der Teilchen in einem bestimmten Volumen, dem Wirkungsquerschnitt σ (Wahrscheinlichkeit das ein Stoß stattfindet) und der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} abhängig, vereinfacht also vom Druck p und der Temperatur T abhängig. Es wird zudem zwischen *elastischen* und *inelastischen* Stößen unterschieden. Für die Linienbreite bei Stoßverbreiterung gilt¹⁷

$$\Delta\nu_{\text{st}} = \frac{p\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{8}{\pi m k_B T}}, \quad (3.38)$$

wobei m die Masse der stoßenden Teilchen beschreibt. Bei einem He-Ne-Laser liegt beispielsweise die Dopplerverbreiterung in einer Größenordnung von $\Delta\nu_{\text{d}} \approx 1,5$ GHz, die Stoßverbreiterung bei $\Delta\nu_{\text{st}} \approx 100$ MHz und die natürliche Linienbreite des $3s \rightarrow 2p$ -Übergangs bei $\Delta\nu \approx 10$ MHz.¹⁸ Die natürliche Linienbreite hat im Gegensatz zur Dopplerverbreiterung einen deutlich geringeren Einfluss auf die Gesamtverbreiterung der Laserlinie.

¹⁷vgl.: R. Dohlus (2010) [4], S.32ff

¹⁸vgl.: J. Eichler (2006) [7], S.37ff

3.5 Aufbau, Funktion und Interferenzmuster des Michelson-Interferometers

Der schematische Aufbau des Michelson-Interferometers ist in Abbildung 7 dargestellt. Dieser besteht im Wesentlichen aus einer Lichtquelle, einem Strahlteiler ST und zwei Spiegeln M_1 und M_2 , wobei M_1 in x -Richtung verschoben werden kann. Trifft eine ebene Welle \mathbf{E} auf den Strahlteiler¹⁹ ST, so wird dieser im Idealfall in zwei Teilstrahlen zu je 50% der Ausgangsintensität aufgeteilt. Ein Teilstrahl wird senkrecht zur Einfallsrichtung am ST reflektiert, der andere Teilstrahl wird transmittiert. Ein Teilstrahl wird senkrecht zur Einfallsrichtung am ST reflektiert, der andere Teilstrahl wird transmittiert.

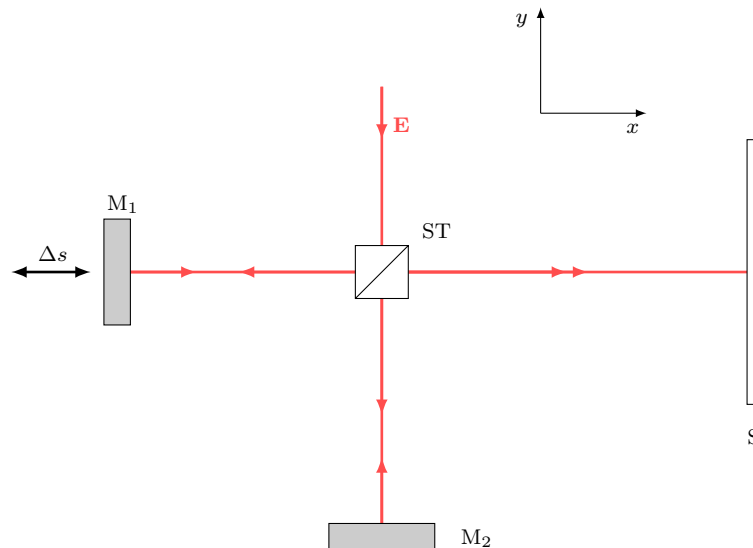


Abb. 7: Schematische Darstellung des Michelson-Interferometers.

Die beiden Spiegel $M_{1,2}$ reflektieren anschließend die Teilstrahlen zurück zum ST, sodass diese nun zu je 25% der Ausgangsintensität aufgeteilt werden. Der transmittierte Teilstrahl von M_1 und der reflektierte Strahl von M_2 bewegen sich nun in gleicher Richtung und interferieren. Die Interferenzerscheinung kann schließlich in der Ebene S beobachtet werden. Der Strahlteilerwürfel hat, im Gegensatz zu einer Strahlteilerplatte, den Vorteil, dass die Lichtwelle keinen Phasensprung bei der Reflexion am optisch dichteren Medium erfährt. Der resultierende Phasensprung bei einer Strahlteilerplatte müsste durch eine zweite Kompensationsplatte in einem Arm des Interferometers ausgeglichen werden.

Herleitung der Intensitätsverteilung

Für die Herleitung²⁰ der Intensitätsverteilung I_S in Abhängigkeit von der Wegdifferenz Δs an der Beobachtungsebene S, betrachte man zunächst die einfallende ebene Welle einer Lichtquelle mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t). \quad (3.39)$$

¹⁹In diesem Fall ein Strahlteilerwürfel. Ebenso möglich wäre ein Aufbau mit einer Strahlteilerplatte und einer Kompensationsplatte.

²⁰vgl.: W. Demtröder (2009) [3], S.314

Sei T, R das Transmissions- bzw. Reflexionsvermögen des Strahlteilerwürfels, dann gilt für die Amplitude E_1 der ersten vom Strahlteiler erzeugten Teilwelle in der Beobachtungsebene S

$$E_1 = \sqrt{T \cdot R} E_s \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (3.40)$$

mit $|\mathbf{E}_s| = E_s$ und der Phasenverschiebung $\varphi_1 = k s_1$, wobei s_1 den zurückgelegten optischen Weg der Welle im Interferometer beschreibt. Für die zweite Teilwelle gilt analog

$$E_2 = \sqrt{R \cdot T} E_s \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.41)$$

Die Intensität I ist als zeitliches Mittel der Energiestromdichte definiert. Betrachtet man nun die transmittierte Intensität der Überlagerung beider Amplituden an der Ebene S, so gilt

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0(E_1 + E_2)^2 \\ &= c\varepsilon_0 R T E_s^2 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]^2 \\ &= 4c\varepsilon_0 R T E_s^2 \cos^2\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \\ &= 2c\varepsilon_0 R T E_s^2 \cos^2(\omega t + \tilde{\varphi})(1 + \cos(\Delta\varphi)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

mit $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, der elektrischen Feldkonstante ε_0 und $\tilde{\varphi} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Für den Fall, dass der Strahlteiler ein Transmissions- bzw. Reflexionsvermögen von $T = R = 0,5$ besitzt, gilt

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_s^2 (1 + \cos(\Delta\varphi)) \langle \cos^2(\omega t + \tilde{\varphi}) \rangle. \quad (3.43)$$

Der zeitabhängige Term wird dabei über die Periode $T = 2\pi/\omega$ gemittelt

$$\langle \cos^2(\omega t + \tilde{\varphi}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \tilde{\varphi}\right) dt = \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

und in Gleichung (3.43) eingesetzt. Für die zeitlich gemittelte Intensität gilt nun

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \bar{I}_0 (1 + \cos(\Delta\varphi)), \quad (3.45)$$

wobei $\bar{I}_0 = c\varepsilon_0 E_s^2/2$. Die beobachtete transmittierte Intensität ist demnach nur von der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ bzw. der optischen Wegdifferenz $\Delta\tilde{s}$ der beiden Wellen abhängig

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\tilde{s}. \quad (3.46)$$

In Abbildung 8 ist der normierte Verlauf der Intensität aus Gleichung (3.45) dargestellt. Der Beobachter würde demnach bei einer sich ändernden Wegdifferenz Δs der Spiegel, abwechselnd destruktive und konstruktive Interferenz beobachten können. Dabei ist zu beachten, dass die reflektierte Welle am Spiegel M_1 im Gegensatz zum anderen Interferometerarm die Wegdifferenz Δs doppelt zurücklegt. Es gilt daher der Zusammenhang

$$\Delta\tilde{s} = 2\Delta s, \quad (3.47)$$

wobei $\Delta\tilde{s}$ die optische Wegdifferenz beschreibt und Δs die mechanische Längenänderung des Interferometerarms.

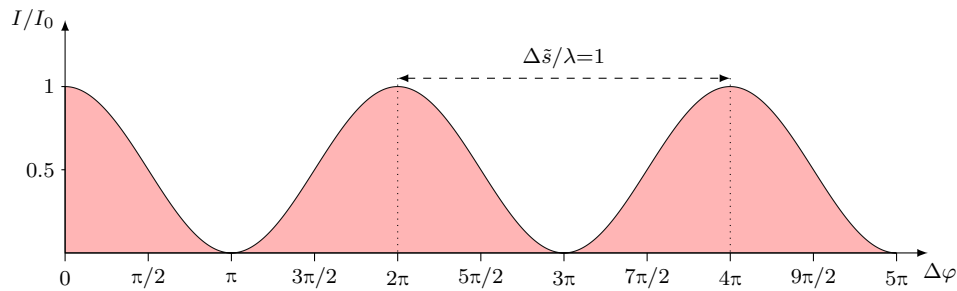


Abb. 8: Transmittierte Intensität I/I_0 der Interferenz im Michelson-Interferometer in Abhängigkeit von der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ beider Teilwellen.

Nach Gleichung (3.45) gilt für die konstruktive Interferenz (Intensitätsmaxima)

$$\Delta\varphi = 2m\pi \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.48)$$

und für die destruktive Interferenz

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.49)$$

Das Michelson-Interferometer kann dazu genutzt werden Weg- aber auch Wellenlängenunterschiede genau zu bestimmen. Ändert man z. B. durch Verschieben des Spiegels M_1 kontinuierlich die Wegdifferenz Δs , so wird nach Gleichung (3.46) und (3.48) immer dann ein Intensitätsmaxima auftreten, wenn der Gangunterschied $\Delta\tilde{s}$ einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht. Zählt man die auftretenden Maxima über die verschobene Wegstrecke, so gilt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\Delta\tilde{s}}{N} = \frac{2\Delta s}{N}, \quad (3.50)$$

wobei N die Anzahl der Intensitätsmaxima beschreibt.

Interferenz gleicher Neigung und Dicke

Die Interferenzerscheinungen im Michelson-Interferometer lassen sich im Wesentlichen auf die Interferenz *gleicher Neigung* und *gleicher Dicke* zurückführen. Interferenz gleicher Neigung entsteht, wenn monochromatisches Licht mit unterschiedlichem Einfallswinkel auf zwei planparallele Grenzflächen trifft.²¹ Der Gangunterschied zweier durch die Platten resultierenden Teilstrahlen hängt nur vom Einfallswinkel α des einfallenden Strahls ab. Im Falle des Michelson-Interferometers (siehe Abbildung 9 links) bestehen die planparallelen Grenzflächen aus zwei Spiegeln M_1 und M_2 , welche bei einem Gangunterschied $\Delta s > 0$ einen virtuellen Plattenabstand von Δs bilden. Die virtuellen Lichtquellen Q_1 und Q_2 der beiden Spiegel liegen auf einer Achse. Aufgrund der Symmetrie ist das entstehende Interferenzbild ein System von konstruktiven und destruktiven Ringen, welche auch als *Haidinger'sche Ringe* bezeichnet

²¹vgl.: FH München (2014) [18], S.1-6

werden. Vergrößert sich der Spiegelabstand weiter, laufen die Ringe aus dem Zentrum heraus. Interferenz gleicher Dicke entsteht, wenn paralleles Licht auf eine Keilplatte trifft. Bei gleichem Einfallswinkel ist der Gangunterschied nur von der Schichtdicke d_i des Keils abhängig. Im Michelson-Interferometer wird ein Luftkeil über die Verkipfung eines Spiegels erzeugt.

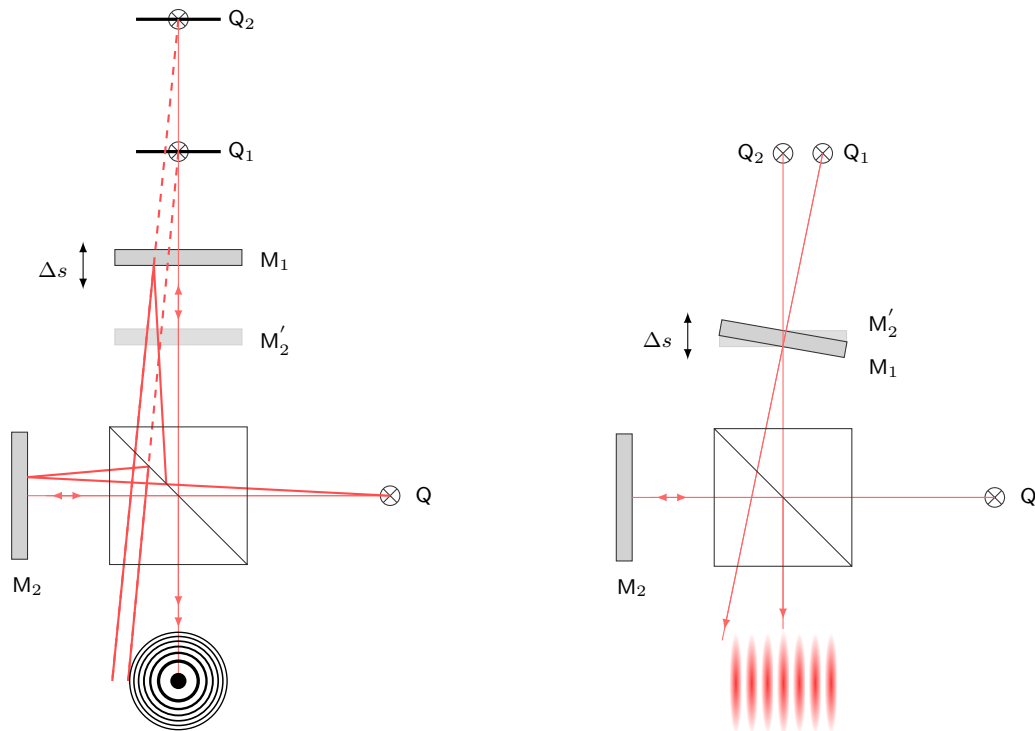


Abb. 9: Links: Schematische Darstellung der Interferenz gleicher Neigung im Michelson-Interferometer mit zwei direkt hintereinander liegenden virtuellen Lichtquellen Q_1 und Q_2 . Es entsteht ein System aus konzentrischen Ringen. Rechts: Darstellung der Interferenz gleicher Dicke mit leicht zueinander verkippten Spiegeln. Q_1 und Q_2 liegen nun auf gleicher Höhe. Es entsteht dabei ein System aus Interferenzstreifen.

In Abbildung 9 (rechts) ist die Interferenz gleicher Dicke für eine Punktquelle Q und den Fall $\Delta s = 0$ dargestellt. Die virtuellen Punktquellen befinden sich hinter den Spiegeln und liegen auf der selben Höhe. Infolgedessen ist die zu beobachtende Interferenzerscheinung ein System aus äquidistanten parallelen Streifen. Bei der Justage in einem realen Versuchsaufbau liegt häufig eine Mischung aus Interferenz gleicher Neigung und Dicke vor. Die virtuellen Lichtquellen liegen nun weder auf einer Achse noch auf einer Höhe. Das resultierende Interferenzbild ist ein verzerrtes Ringsystem, dessen Mittelpunkt verschoben ist.

Herleitung der Haidinger'schen Interferenzringe

Es wird nun der Fall betrachtet, dass ein divergierendes Lichtbündel auf den Strahlteiler trifft. Im Falle eines He-Ne-Lasers, welcher auf kurzen Distanzen eine sehr geringe Divergenz aufweist, wird der eingekoppelte Strahl mit Hilfe einer Linse L aufgeweitet. Abbildung 10 zeigt den Strahlengang zweier Teilstrahlen in der x,y -Ebene eines divergenten Laserstrahls im Michelson-Interferometer.²²

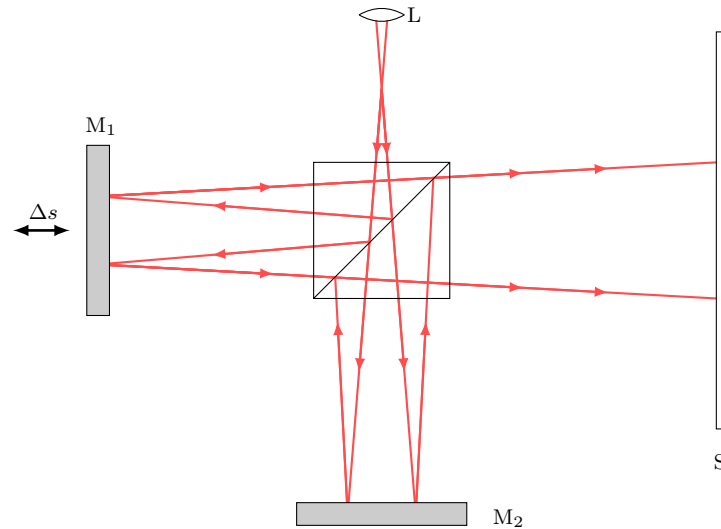


Abb. 10: Strahlengang im Interferometer eines einfallenden divergenten Strahls und einer Wegdifferenz $\Delta s = 0$ der beiden Spiegel.

Der Aufbau in Abbildung 10 zeigt die Spiegel des Michelson-Interferometers in der sog. *Weißlichtposition* ($\Delta s = 0$). In diesem Fall liegen die durch den Strahlteiler erzeugten Teilstrahlen auf der selben Achse, sodass am Schirm nur ein homogenes Interferenzbild konstanter Intensität zu sehen ist. Ist $\Delta s > 0$, so weisen die erzeugten Teilstrahlen einen lateralen Versatz auf. Konstruktiv interferieren können nur diejenigen Teilstrahlen, deren Gangunterschied am Beobachtungspunkt einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht.

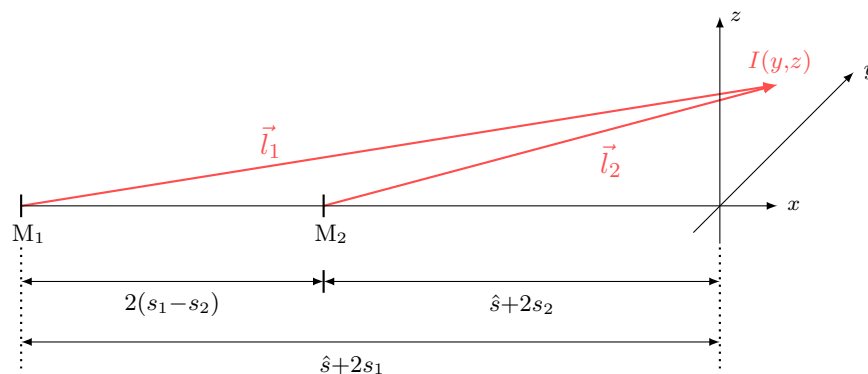


Abb. 11: Vereinfachter Strahlengang im Michelson Interferometer.

Der Verlauf zweier solcher Strahlen kann wie in Abbildung 11 vereinfacht auf einer Achse

²²Der durch die Brechung am Strahlteiler resultierende Versatz der Teilstrahlen wurde in der Zeichnung nicht berücksichtigt.

dargestellt werden. Die Abstände s_1 und s_2 beschreiben die Position der Spiegel relativ zum Strahlteilerwürfel. Der Faktor \hat{s} berücksichtigt die Abstände von der Linse zum Strahlteiler, der Wegverkürzung durch die Brechung im Strahlteiler selbst sowie den Abstand vom Strahlteiler zum Schirm. Die Beträge der resultierenden Vektoren \vec{l}_1 und \vec{l}_2 ergeben den zurückgelegten Lichtweg beider Teilstrahlen im Interferometer

$$l_1 = |\vec{l}_1| = \sqrt{y^2 + z^2 + (\hat{s} + 2s_1)^2} \quad (3.51)$$

$$l_2 = |\vec{l}_2| = \sqrt{y^2 + z^2 + (\hat{s} + 2s_2)^2}, \quad (3.52)$$

wobei nur die z -Komponente betrachtet werden soll. Mit dem Gangunterschied $\Delta l = l_1 - l_2$, Gleichung (3.45) und Gleichung (3.46) gilt für die Intensität

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \bar{I}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta l \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \bar{I}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{z^2 + (\hat{s} + 2s_1)^2} - \sqrt{z^2 + (\hat{s} + 2s_2)^2} \right) \right) \right) \\ &= \bar{I}_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\sqrt{z^2 + (\hat{s} + 2(s_2 + \Delta s))^2} - \sqrt{z^2 + (\hat{s} + 2s_2)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Der Intensitätsverlauf $I(\Delta s, z)$ ist in Abbildung 12 dargestellt.

Abb. 12: Intensitätsverlauf $I(z)$ eines Ringsystems am Beobachtungsschirm in Richtung der z -Komponente für verschiedene Gangunterschiede Δs vor und hinter der Weißlichtposition.

In Abbildung 13 ist das in der y, z -Ebene radialsymmetrische Interferenzringsystem aus dem Querschnitt des Intensitätsverlaufs von Abbildung 12 dargestellt.

Abb. 13: Interferenzringsystem beim Michelson-Interferometer für verschiedene Gangunterschiede Δs .

Nähert sich der Gangunterschied der Weißlichtposition $\Delta s \rightarrow 0$, nimmt der Durchmesser der Ringe kontinuierlich zu. Für den Beobachter laufen die Ringe dabei, je nach Bewegungsrichtung des Spiegels, nach innen oder außen.

3.6 Interferogramme und Kontrastfunktionen zweier Linienprofile

Mit dem Michelson-Interferometer kann das Spektrum $S(\nu)$ einer Lichtquelle vermessen werden. Die notwendige Bedingung für die Beobachtung von Interferenz ist das Kohärenzkriterium. Es besteht daher ein direkter Zusammenhang zwischen dem modulierten Intensitätsprofil (Interferogramm) des Interferometers und der Kohärenzlänge der Lichtquelle. Eine Intensitätsmodulation ist nur dann sichtbar, wenn der Gangunterschied $\Delta\tilde{s}$ zweier sich überlagernder Wellen in der Größenordnung der Kohärenzlänge Δl der Lichtquelle liegt. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen der Kohärenz und damit der spektralen Breite einer Lichtquelle und dem resultierenden Interferogramm im Michelson-Interferometer hergeleitet werden.

Man betrachte dazu die Superposition zweier Wellen gleicher Frequenz mit einem Laufzeitunterschied τ . Für die beobachtbare modulierte Intensität $I(\tau)$ gilt

$$\begin{aligned} I(\tau) &= c\varepsilon_0 \langle |E(t) + E(t + \tau)| \rangle \\ &= c\varepsilon_0 \langle (E(t) + E(t + \tau)) \cdot (E(t) + E(t + \tau))^* \rangle \\ &= 2I_0 + 2c\varepsilon_0 \underbrace{\Re\{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle\}}_{\Gamma(\tau)}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Der Interferenzterm $\Gamma(\tau)$ wird als *komplexe Selbstkohärenzfunktion* bezeichnet.²³ Sie ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier sich überlagernder Wellen $E(t)$ über einen Zeitraum T mit

$$\Gamma(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^*(t)E(t + \tau) dt. \quad (3.55)$$

Für die normierte komplexe Selbstkohärenzfunktion $\gamma(\tau)$ gilt abschließend

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)}. \quad (3.56)$$

Die Intensitätsverteilung in Gleichung (3.54) kann damit vereinfacht werden zu

$$I(\tau) = 2I_0 (1 + \Re\{\gamma(\tau)\}). \quad (3.57)$$

In Abschnitt 3.5 wurde die mittlere Intensitätsverteilung $\bar{I}(\Delta\varphi)$ für zwei sich überlagernde monochromatische Wellen E_1 und E_2 im Michelson-Interferometer für eine Phasendifferenz $\Delta\varphi$ hergeleitet. Diese ist von ihrer Form her analog zu Gleichung (3.57) und kann daher ebenfalls als Funktion des Laufzeitunterschiedes τ formuliert werden. Unter Verwendung des Zusammenhangs $\tau = \Delta\tilde{s}/c$ gilt für die Phasendifferenz mit der Wellenlänge λ_0

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta\tilde{s} = \frac{2\pi}{\lambda_0} c\tau = 2\pi\nu_0\tau. \quad (3.58)$$

²³Der Laufzeitunterschied und die komplexe Selbstkohärenzfunktion werden üblicherweise mit τ bzw. Γ bezeichnet und haben eine andere Bedeutung als die in Abschnitt 3.4 verwendete Lebensdauer τ von Zuständen bzw. Halbwertsbreiten Γ .

Der hergeleitete Ausdruck in Gleichung (3.45) kann demnach gleichermaßen geschrieben werden als

$$\bar{I}(\tau) = \frac{1}{2} \bar{I}_0 (1 + \cos(2\pi\nu_0\tau)). \quad (3.59)$$

Dies entspricht dem Intensitätsverlauf aus Gleichung (3.57), wobei der Kosinusterm dem Realteil der normierten Selbstkohärenzfunktion für eine ebene Welle der Form

$$\Gamma(\tau) = e^{-i\omega_0\tau} \implies \Re\{\gamma(\tau)\} = \cos(\omega_0\tau) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = 2\pi\nu_0 \quad (3.60)$$

und der Zentralfrequenz ω_0 entspricht. Der gegenüber Gleichung (3.57) abweichende Faktor $I_0/2$ in Gleichung (3.59) resultiert aus der Berücksichtigung der Reflexions- und Transmissionsverluste am Strahlteiler. Liegt ein verbreitertes Spektrum vor, wird die Phase durch das Spektrum $S(\omega)$ modifiziert. Für die normierte Selbstkohärenzfunktion gilt in diesem Fall der Zusammenhang²⁴

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_0^\infty S(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int_0^\infty S(\omega) d\omega}. \quad (3.61)$$

Im Folgenden sollen die Selbstkohärenzfunktionen für das Spektrum $S_L(\omega)$ einer natürlich verbreiterten, lorentzförmigen Linie aus Gleichung (3.26) und einer dopplerverbreiterten, gaußförmigen Linie $S_G(\omega)$ aus Gleichung (3.36) hergeleitet werden. Die integrale Intensität beider Profile ist bereits auf

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty S_{L,G}(\omega) d\omega = I_0 \quad (3.62)$$

normiert. Für die komplexe Selbstkohärenzfunktion einer Lorentzlinie gilt

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty S_L(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_0^\infty \frac{I_0\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.63)$$

Für die Integration wird eine Substitution der Form $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ durchgeführt und die Integralgrenzen auf $(-\infty, \infty)$ erweitert, sodass ein Integral der Form

$$\Gamma(\tau) = \frac{I_0\gamma}{2\pi} e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\tilde{\omega}\tau}}{\tilde{\omega}^2 + (\gamma/2)^2} d\tilde{\omega} \quad (3.64)$$

zu lösen ist. Die Substitution gibt eine untere Integralgrenze von $-\omega_0$, die aufgrund der Symmetrie des Realteils auf $-\infty$ erweitert werden kann. Die Lösung des Integrals lässt sich in Tabellenwerken nachschlagen.²⁵

²⁴vgl.: TU-Dresden (2012) [19], S.10

²⁵siehe: I. Gradshteyn, I. Ryzhik (1965) [9], S.312

Für $\gamma > 0$ und τ real existiert damit eine Lösung der Form

$$\Gamma(\tau) = \left(\frac{I_0 \gamma}{2\pi} \right) \frac{2\pi}{\gamma} e^{-|\frac{\gamma}{2}\tau|} e^{-i\omega_0\tau} = I_0 e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} e^{-i\omega_0\tau}. \quad (3.65)$$

Für die normierte komplexe Selbstkohärenzfunktion $\gamma_L(\tau)$ der natürlich verbreiterten, lorentzförmigen Linie erhält man schließlich

$$\gamma_L(\tau) = e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} e^{-i\omega_0\tau} \quad \text{mit} \quad \Re\{\gamma_L(\tau)\} = e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} \cos(\omega_0\tau). \quad (3.66)$$

Das mit dem Michelson-Interferometer sichtbare Interferogramm der Lorentzlinie lässt sich gemäß Gleichung (3.57) beschreiben mit

$$I(\tau) = \frac{1}{2} I_0 \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} \cos(\omega_0\tau) \right). \quad (3.67)$$

Der Intensitätsverlauf des Interferogramms ist in Abbildung 14 dargestellt.

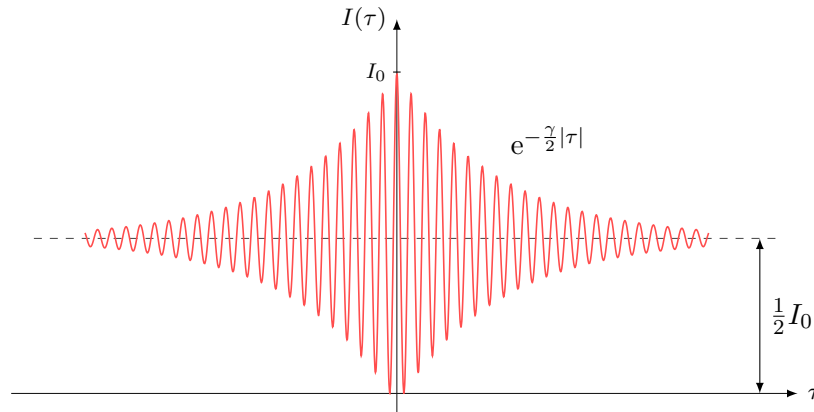


Abb. 14: Interferogramm einer idealen, natürlich verbreiterten Lichtquelle. Die Einhüllende hat die Form zweier nach rechts und links abklingender Exponentialfunktionen.

Für die komplexe Selbstkohärenzfunktion der dopplerverbreiterten Linie $S_G(\omega)$ gilt gemäß Gleichung (3.61) und (3.36) analog

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} S_G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} \tilde{I}(\omega_0) \exp\left(-\frac{\ln(16)(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.68)$$

Unter Anwendung der Substitution $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ und der Verschiebung der Integralgrenzen gilt für die Lösung des Integrals

$$\Gamma(\tau) = \tilde{I}(\omega_0) e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tilde{\omega}^2} e^{b\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = \tilde{I}(\omega_0) e^{-i\omega_0\tau} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{b^2}{4a} \quad (3.69)$$

mit

$$a = \frac{\ln(16)}{\Delta\tilde{\omega}^2} \quad \text{und} \quad b = i\tau. \quad (3.70)$$

Unter Berücksichtigung der Definition für $\tilde{I}(\omega_0)$ aus Abschnitt 3.4 vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\Gamma(\tau) = I_0 \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\tau^2}{4\ln(16)}\right). \quad (3.71)$$

Damit folgt abschließend für die normierte komplexe Selbstkohärenzfunktion $\gamma_G(\tau)$ der dopplerverbreiterten, gaußförmigen Linie

$$\gamma_G(\tau) = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\tau^2}{4\ln(16)}\right) e^{-i\omega_0\tau} \quad \text{mit} \quad \Re\{\gamma_G(\tau)\} = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\tau^2}{4\ln(16)}\right) \cos(\omega_0\tau). \quad (3.72)$$

Das Interferogramm $I(\tau)$ der Selbstkohärenzfunktion ist in Abbildung 15 dargestellt.

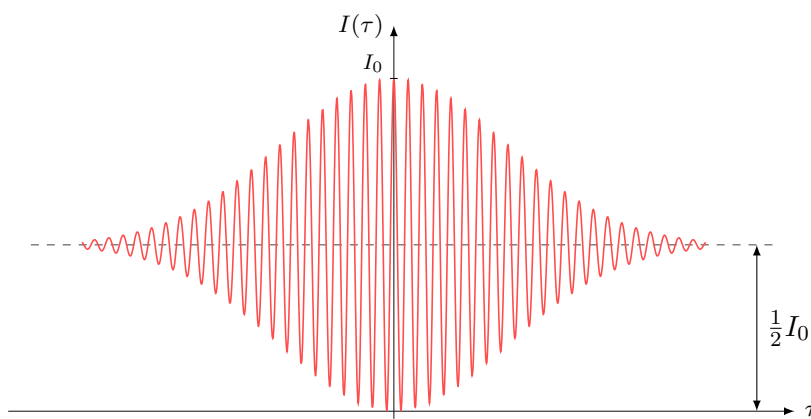


Abb. 15: Interferogramm einer dopplerverbreiterten Lichtquelle. Die Einhüllende entspricht einem Gaußprofil.

Für die quantitative Analyse des Interferogramms und damit der Lichtquelle bedient man sich des sog. Interferenzkontrastes²⁶ $K(\tau)$. Dieser ist als Kontrast zweier aufeinanderfolgender Intensitätsmaxima und Minima definiert mit

$$K(\tau) = \frac{I(\tau_{\max}) - I(\tau_{\min})}{I(\tau_{\max}) + I(\tau_{\min})}. \quad (3.73)$$

Anschaulich ist der Kontrast ein Maß für die Interferenzfähigkeit des Lichts und direkt verknüpft mit der Kohärenzzeit $\Delta\tau$. Diese ist als Laufzeitunterschied $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ definiert, für den der normierte Kontrastverlauf auf e^{-1} abgefallen ist.

$$\frac{1}{e} = K(\tau_i) \quad (3.74)$$

Für die Kohärenzlänge Δl gilt ferner

$$\Delta l = c\Delta\tau. \quad (3.75)$$

Es soll nun die Kontrastfunktion für eine quasimonochromatische Lichtquelle mit einer Intensitätsverteilung gemäß Gleichung (3.57) betrachtet werden. Aufgrund der Symmetrie des entstehenden Interferogramms, kann vereinfacht angenommen werden, dass der Betrag von

²⁶Englisch: fringe visibility

$\gamma(\tau)$ für benachbarte Extrempunkte gleich ist. Damit gilt für die lokalen Extrempunkte

$$\begin{aligned} I(\tau_{\max}) &\approx 2I_0(1 + |\gamma|) \\ I(\tau_{\min}) &\approx 2I_0(1 - |\gamma|) \end{aligned} \quad (3.76)$$

und für die Kontrastfunktion folgt schließlich

$$K(\tau) = \frac{(1 + |\gamma|) - (1 - |\gamma|)}{(1 + |\gamma|) + (1 - |\gamma|)} = |\gamma|. \quad (3.77)$$

Für eine quasimonochromatische Lichtquelle entspricht demnach der Betrag der normierten Selbstkohärenzfunktion der Kontrastfunktion und damit der Einhüllenden des gemessenen Interferogramms. Im Folgenden bezeichne $\hat{\gamma}(\tau) = |\gamma(\tau)|$ den Verlauf der Einhüllenden. Es können nun die Kontrastfunktionen bzw. Einhüllenden der Interferogramme in Abhängigkeit vom optischen Wegunterschied $\Delta\tilde{s} = c\tau$ für das Lorentz- und das Gaußprofil formuliert werden. Für die Einhüllende der Lorentzlinie gilt

$$\hat{\gamma}_L(\Delta\tilde{s}) = |\gamma| = e^{-\frac{c\gamma}{2}|\Delta\tilde{s}|} \quad \text{mit} \quad \Delta l_L = \frac{4c}{\gamma}. \quad (3.78)$$

Daraus folgt abschließend für den normierten Verlauf der Einhüllenden

$$\hat{\gamma}_L(\Delta\tilde{s}) = \exp\left(-\frac{2|\Delta\tilde{s}|}{\Delta l_L}\right). \quad (3.79)$$

Für die Einhüllende $\hat{\gamma}_G(\Delta\tilde{s})$ des gaußförmigen Spektrums gilt

$$\hat{\gamma}_G(\Delta\tilde{s}) = \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2 c^2 \Delta\tilde{s}^2}{4 \ln(16)}\right) \quad \text{mit} \quad \Delta l_G = \frac{4\sqrt{\ln(16)}}{\Delta\omega c}. \quad (3.80)$$

Mit der Substitution der Kohärenzlänge Δl_G vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\hat{\gamma}_G(\Delta\tilde{s}) = \exp\left(-\left(\frac{2\Delta\tilde{s}}{\Delta l_G}\right)^2\right). \quad (3.81)$$

Die gewonnenen Gleichungen für die normierten Einhüllenden in Abhängigkeit von der Kohärenzlänge Δl lassen bei späteren Auswertungen der Interferogramme demzufolge eine direkte Aussage auf die Kohärenzlänge der Lichtquelle zu.

3.7 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation erlaubt es die Frequenzen zeitlich periodischer Funktionen $f(t)$ zu analysieren. Ebenso können mit Hilfe der Fourier-Transformation periodische Funktionen im Ortsraum, wie die im vorherigen Kapitel beschriebenen Interferogramme $I(x)$, in den Frequenzraum transformiert werden.²⁷ Das Interferogramm und die spektrale Verteilung $S(\tilde{\nu})$ der Lichtquelle in Abhängigkeit von der Wellenzahl $\tilde{\nu} = \lambda^{-1}$ bilden dabei ein sog. Fourier-Transformationspaar²⁸ mit der Hin- und Rücktransformation

$$\mathcal{F}\{S(\tilde{\nu})\} = I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tilde{\nu})e^{-i2\pi\tilde{\nu}x} d\tilde{\nu}, \quad (3.82)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{I(x)\} = S(\tilde{\nu}) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x)e^{i2\pi\tilde{\nu}x} dx. \quad (3.83)$$

Demzufolge kann mit der Fourier-Transformation aus den gemessenen Interferogrammen das Spektrum der Lichtquelle berechnet werden. Für eine einfache Schwebung zweier monochromatischer Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen sind in Abbildung 16 das dazugehörige Interferogramm und die Fourier-Transformation abgebildet.

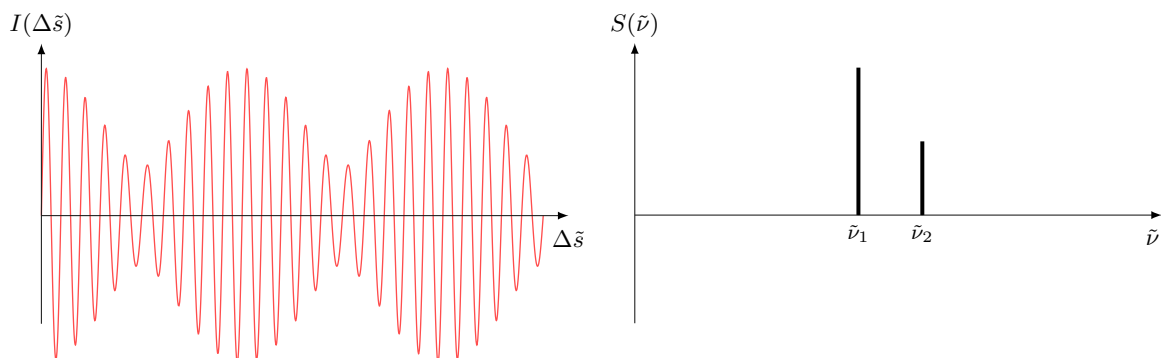


Abb. 16: Interferogramm einer Schwebung mit unterschiedlichen Frequenzen ν_1 und ν_2 und Amplituden (links) sowie die Fourier-Transformierte $S(\tilde{\nu})$ des Interferogramms in Abhängigkeit von der Wellenzahl $\tilde{\nu}$ (rechts). Die Transformation liefert zwei δ -Peaks für die beitragenden Frequenzen. Es wurden nur die positiven Frequenzen dargestellt.

Für das Interferogramm einer spektral verbreiterten Lichtquelle am Beispiel einer Lorentzlinie setzt sich das Spektrum der Fouriertransformation aus den Einzelspektren der beteiligten Wellenzahlen zusammen. Der Verlauf $S(\tilde{\nu})$ ist in diesem Fall kontinuierlich. Die im vorherigen Kapitel berechnete komplexe Selbstkohärenzfunktion der Lorentzlinie aus Gleichung (3.63) kann als Beispiel für eine kontinuierliche Fourier-Transformation herangezogen werden. Im Falle real gemessener Interferogramme werden jedoch nur diskrete Messpunkte betrachtet. Die Kurvenverläufe sind daher nicht kontinuierlich und zudem nicht unendlich ausgedehnt. Infolgedessen wird die sog. Diskrete Fourier-Transformation (DFT) bzw. Fast-Fourier-Transformation (FFT) für die Analyse der Daten genutzt. Übliche Programme zur Durchführung solcher Transformationen sind beispielsweise Matlab oder Octave.

²⁷Zur Vereinfachung wird mit x der optische Weg $\Delta\bar{s}$ bezeichnet.

²⁸vgl.: A. Gerlach (2005) [8], S.14

3.8 Brechzahlbestimmung von Glas

Mit dem Michelson-Interferometer lassen sich die Brechzahlen transparenter Objekte bestimmen. Dazu wird z. B. eine Glasplatte der Dicke d mit planparallelen Grenzflächen orthogonal zum einfallenden Laserstrahl in einen der zwei Arme des Interferometers gestellt. Durch Verkippen der Glasplatte senkrecht zur Einfallsebene ändert sich die zurückgelegte Strecke des Lichtes im Medium und damit der Gangunterschied Δs . Die resultierenden Durchgänge N der Maxima im Interferenzbild sowie der veränderte Winkel α der Glasplatte lassen einen Rückschluss auf die Brechzahl n des Materials zu. In Abbildung 17 ist der Strahlengang durch eine um 35° verkippte Glasplatte in der Einfallsebene dargestellt.

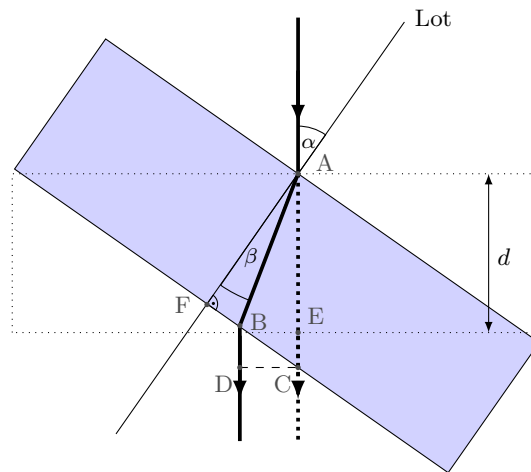


Abb. 17: Strahlengang durch eine um 35° verkippte Glasplatte.

Für die Berechnung des Gangunterschiedes Δs des Lichtweges in Abbildung 17 betrachte man die beiden Lichtwege

$$\delta_1 = n_G \cdot \overline{AE} + n_L \cdot \overline{EC} \quad (3.84)$$

$$\delta_2 = n_G \cdot \overline{AB} + n_L \cdot \overline{BD} \quad (3.85)$$

durch die senkrechte und verkippte Position der Glasplatte. Der Brechungsindex der Luft wird mit $n_L \approx 1$ abgeschätzt, weiterhin entspricht die Strecke \overline{AE} gerade dem Durchmesser d des Glases, sodass für Δs gilt²⁹

$$\Delta s = \delta_2 - \delta_1 = n_G \cdot \overline{AB} + \overline{BD} - n_G \cdot d - \overline{EC}. \quad (3.86)$$

Berücksichtigt man nun, dass der Lichtweg zweimal durchlaufen wird, also bei einem Gangunterschied von $2\Delta s$ gerade $N\lambda$ Wellenlängen durchfahren werden, erhält man den Ausdruck

$$\frac{N\lambda}{2} = n \cdot \overline{AB} + \overline{BD} - n \cdot d - \overline{EC} \quad (3.87)$$

²⁹vgl.: I. Deepak (2007) [2], S.19f

mit $n = n_G$. Für die verbliebenen Strecken gilt

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos(\beta)}, \quad \overline{EC} = \frac{d}{\cos(\alpha)} - d \quad \text{und} \quad \overline{BD} = \overline{BC} \sin(\alpha), \quad (3.88)$$

wobei $\overline{BC} = \overline{FC} - \overline{FB} = d(\tan(\alpha) - \tan(\beta))$. Für den Ausdruck (3.87) gilt dann

$$\frac{N\lambda}{2d} = \frac{n}{\cos(\beta)} - n + 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \sin(\alpha). \quad (3.89)$$

Mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes $n \sin(\beta) = \sin(\alpha)$ und einiger Umformungen vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{N\lambda}{2d} = \sqrt{n^2 + \cos^2(\alpha) - 1} - \cos(\alpha) - n + 1, \quad (3.90)$$

welcher sich leicht nach n lösen und vereinfachen lässt. Für den Brechungsindex n gilt schließlich

$$n = \frac{(2d - N\lambda)(\cos(\alpha) - 1) - \frac{N^2\lambda^2}{4d}}{2d(\cos(\alpha) - 1) + N\lambda}. \quad (3.91)$$

Der quadratische Term kann aufgrund des Verhältnisses von $\lambda^2/d \ll 1$ vernachlässigt werden.

$$n = \frac{(2d - N\lambda)(\cos(\alpha) - 1)}{2d(\cos(\alpha) - 1) + N\lambda} \quad (3.92)$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.92) kann unter der Kenntnis der Dicke der Glasscheibe d , der Anzahl der durchlaufenden Ringe N und des dabei verdrehten Winkels α der Brechungsindex des Materials experimentell bestimmt werden.

4 Experimenteller Aufbau

Ein wesentlicher Bestandteil meiner Tätigkeiten im Rahmen der Masterarbeit war die Planung, Fertigstellung und Optimierung des experimentellen Aufbaus. In diesem Kapitel soll daher der Aufbau und die Funktion wesentlicher Komponenten des Michelson-Interferometers erläutert werden sowie die Planung und Durchführung der Aufbauarbeiten dokumentiert werden.

Die Basis für den Versuchsaufbau des Michelson-Interferometers bildet das Schienen- und Reitersystem von PI-miCos aus der *Moskito-Baureihe*. Im Gegensatz zum vorherigen Aufbau des Interferometers im Fortgeschrittenenpraktikum sind die Komponenten des Moskito-Aufbaus sehr viel kleiner und bieten daher die Möglichkeit einen komprimierten Versuchsaufbau zu realisieren, welcher dennoch sehr leistungsfähig ist. Eine wichtige Aufgabe bestand darin, die Bestandteile des alten Michelson-Versuchsaufbaus, wie z. B. dem Piezoversteller, mit den neuen Teilen zu verbinden und den Aufbau soweit zu optimieren, dass quantitative spektroskopische Untersuchungen mit dem Interferometer durchgeführt werden können.

4.1 Aufbau des Versuchsplatzes

Der Versuchsaufbau wurde auf einer 60×60 cm großen Platte für optische Aufbauten realisiert. Die Platte selbst wurde zusätzlich auf drei 9 cm hohe Klötze gelegt, um größere Lichtquellen, Filter und Photodioden auf den vorhandenen Reitern außerhalb der Platte positionieren zu können. Im Folgenden soll der Aufbau des Versuchsplatzes mit dem He-Ne-Laser als Lichtquelle erläutert werden. Auf die einzelnen Komponenten und deren Spezifikationen wird anschließend in Kapitel 4.2 eingegangen. Zur einfacheren Beschreibung der Vorgehensweise ist in Abbildung 18 der fertige Versuchsplatz für den He-Ne-Laser in der Draufsicht skizziert.

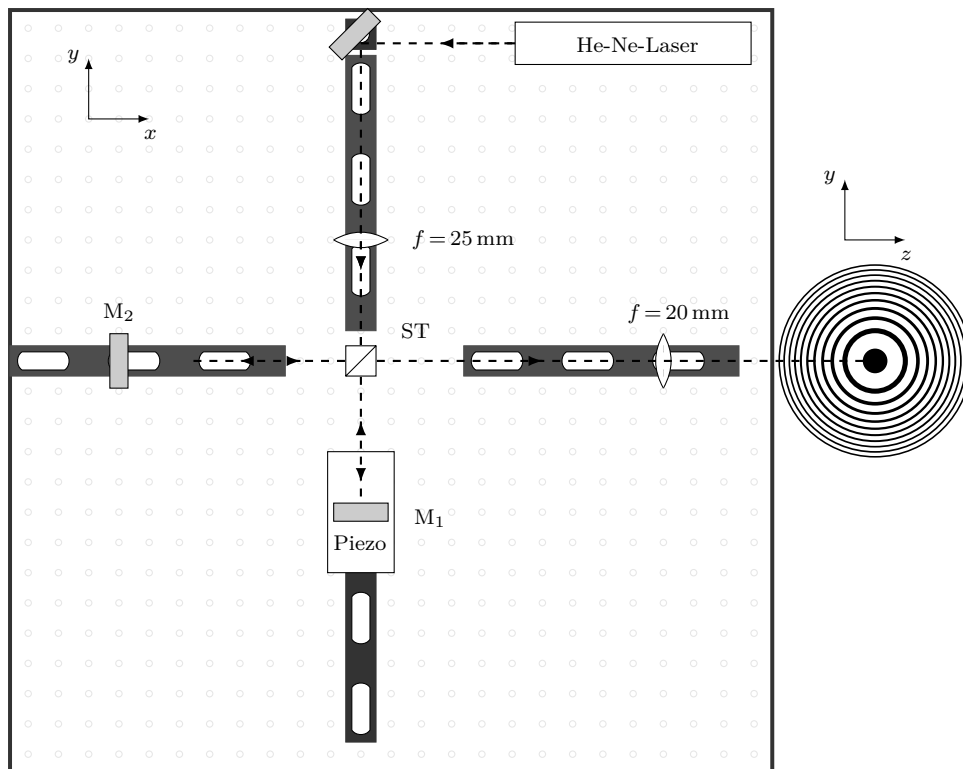


Abb. 18: Aufbau des Michelson-Interferometers mit dem He-Ne-Laser in der x,y -Ebene (Draufsicht).

Der He-Ne-Laser wurde, um Platz einzusparen, am Rand der Platte fest montiert. Der Laserstrahl wird anschließend über einen Umlenkspiegel in das Interferometer eingekoppelt. Das weitere Verfahren zur optimalen Justage des Aufbaus soll kurz in Stichpunkten zusammengefasst werden:

- Der umgelenkte Strahl wird so justiert, dass er parallel zur Lochplatte verläuft und direkt auf der y -Achse liegt. Dies wird am besten über zwei Lochblenden erreicht, die in einem möglichst großen Abstand zueinander positioniert werden.
- Anschließend wird der mit dem Piezo verstellbare Spiegel M_1 in den unteren Arm des Aufbaus gestellt und so verkippt, dass sich der reflektierte Strahl mit dem eintreffenden Strahl deckt. Der Spiegel M_1 sollte im weiteren Verlauf nicht mehr verstellt werden.
- Nun wird der Strahlteiler in die Mitte des Interferometers gestellt. Der nach links reflektierte Teil des Lichts wird mit Hilfe der beiden Lochblenden ebenfalls parallel zum optischen Tisch und in einer Linie zur x -Achse justiert.
- Anschließend kann der Spiegel M_2 in den linken Arm gestellt und so justiert werden, dass sich der reflektierte Strahl wieder mit dem Eintreffenden deckt. Dies wird am besten über eine Lochblende im rechten Arm des Interferometers erreicht. Bei der Justage sollte der Spiegel M_1 zudem mit einem Stück Papier verdeckt werden.
- Im Idealfall beobachtet man am Schirm nun einen einzigen Lichtfleck. Sollte dies nicht der Fall sein, kann der Spiegel M_2 nachjustiert werden.

Ein leichtes Verkippen des Spiegels M_2 erzeugt nun aufgrund der Interferenz gleicher Dicke ein System aus äquidistanten Interferenzstreifen. Die Erzeugung der Haidinger'schen Interferenzringe erfolgt über eine Linse mit der Brennweite $f = 25$ mm, die in den oberen Interferometerarm gestellt wird. Das Interferenzbild kann zudem mit einer zweiten Linse mit z. B. $f = 20$ mm im rechten Arm vergrößert werden.

4.2 Beschreibung der einzelnen Bauteile

Das Moskito-System kann auf einer minimalen optischen Höhe von 2,54 cm arbeiten. Da in den Versuchsaufbau jedoch größere Bauteile aus dem alten Aufbau, z. B. der Piezoversteller, integriert werden mussten, war es vorteilhaft die optische Achse mit Hilfe von Montagestangen und Reitern zu erhöhen. Die dazugehörigen Stangen waren nicht im Sortiment vorhanden und mussten daher in Zusammenarbeit mit der Mechanikwerkstatt des FB1 angefertigt werden. In Abbildung 19 ist eine solche Montagegestange abgebildet. Die Stange besitzt ein M4-Außengewinde (oben) und ein M4-Innengewinde an der unteren Seite, welches die Adaption von Teilen anderer mikrooptischer Systeme erlaubt, die im Praktikum vorhanden sind. Mit Hilfe der Montagestangen konnte der Aufbau auf eine optimale Höhe der optischen Achse von ca. 7,5 cm eingestellt werden. In einem nächsten Schritt wurden die zwei Halterungen der Spiegel M_1 und M_2 der beiden Interferometerarme fertiggestellt. Als Spiegel dienten zwei versilberte Oberflächenspiegel mit einem Durchmesser von $\varnothing 12,7$ mm. Die Spiegel konnten ohne Probleme in die Spiegelhalterungen des Moskito-Systems mit Hilfe eines Gewinderings geklemmt werden. Für einen späteren Versuchsaufbau wäre es dennoch vorteilhaft für den Spiegelhalter passende Auflegescheiben mit $\varnothing 11,5$ mm zu fertigen, auf deren Oberfläche die Spiegel mittig festgeklebt werden können. Dies würde verhindern, dass der Spiegel bei größeren mechanischen Einwirkungen Gefahr läuft zu verrutschen. Außerdem ließe sich so der Spiegel bei einer evtl. Reinigung exakt in die selbe Position zurückbringen. In Abbildung 20 ist der fertig montierte Spiegel M_2 dargestellt.



Abb. 19: Montagegestange mit $\varnothing 8$ mm sowie M4 Innen- und Außengewinde.

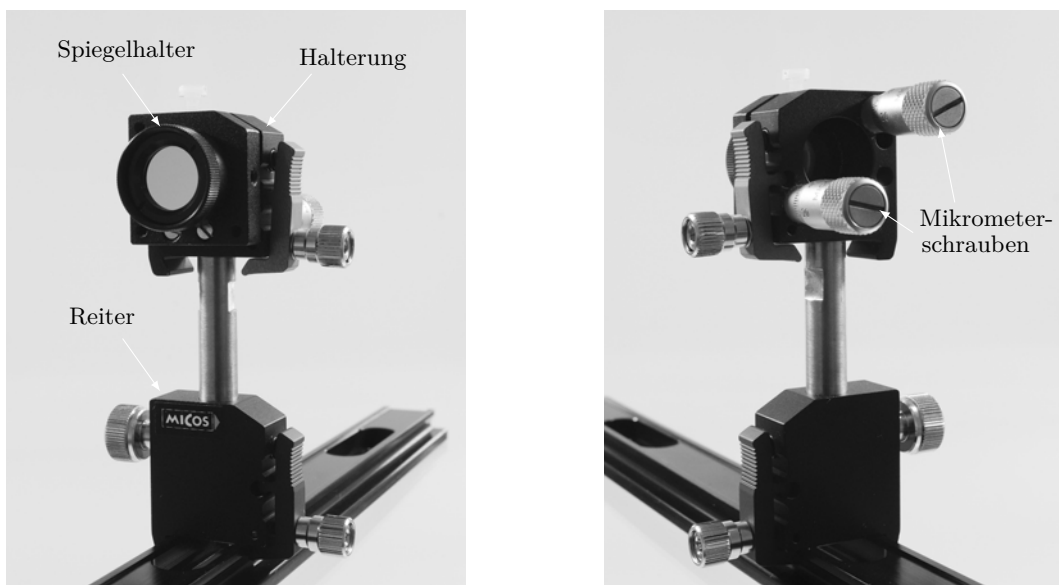


Abb. 20: Vorderansicht des montierten Spiegels M_2 (links) und Rückansicht der Halterung mit den Mikrometerschrauben (rechts).

Mit Hilfe der Mikrometerschrauben können die Spiegel um maximal 7° zur Einfallsebene verkippt werden. Das feine Gewinde der Mikrometerschraube erlaubt so eine sehr präzise Justage der Spiegel. Bei größeren Winkeländerungen kann die Halterung samt Montagstange zusätzlich verdreht werden.

Piezoversteller

Der gesamte Piezoversteller musste aufgrund des hohen Gewichts der Komponenten auf insgesamt zwei Reitern montiert werden. Für die Montage des beweglichen Spiegels M_1 wurde ein kurzes Schienenstück verwendet und auf die Plattform des Piezoverstellers geschraubt. In [Abbildung 21](#) ist der montierte Spiegel M_1 dargestellt. Auf die Schiene konnte anschließend die Halterung für den Spiegel festgeklemmt werden.

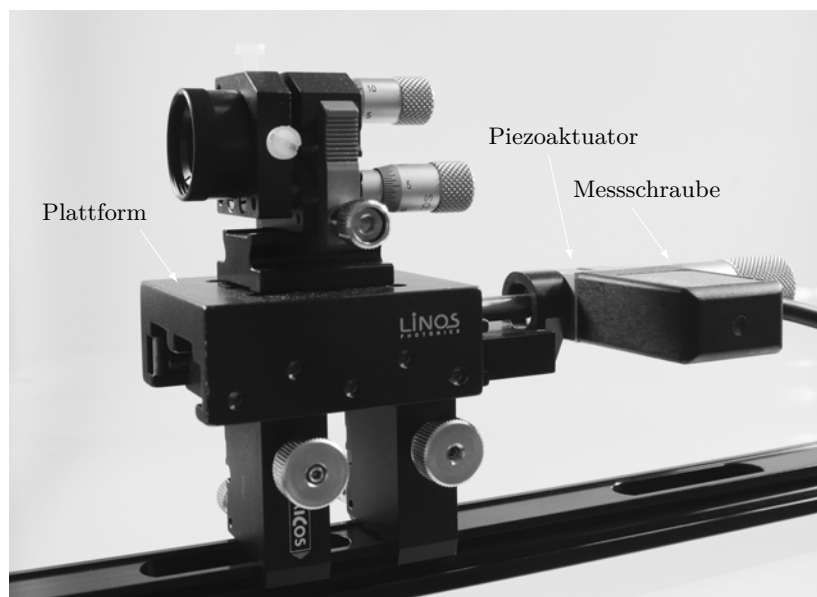


Abb. 21: Piezoversteller mit montiertem Spiegel M_1 .

Die Plattform kann über einen Messschraubenvorsatz mit einer Genauigkeit von $0,01\text{ mm}$ um maximal $2,5\text{ cm}$ verschoben werden. Kernstück des Piezoverstellers ist der Aktuator *Linios Photonics PV 10-80*, welcher mit einem Positionssensor ausgestattet ist. Der Aktuator arbeitet mit einer Betriebsspannung von 0 bis 200 V DC und kann in zwei Modi gefahren werden. Im sog. unregulierten Modus beträgt der Stellweg des Piezos maximal $80\text{ }\mu\text{m}$ und im regulierten Modus $60\text{ }\mu\text{m}$. Der Piezoaktuator ist für eine Druckbelastung von 10 N ausgelegt und damit für die Montage des Spiegelaufbaus geeignet. Die Ansteuerung des Piezoaktuators erfolgt über den *Torque Driver TD 1-200* von Linios. Dieser besitzt ein Potentiometer zur Offsetting und manuellen Betriebs des Piezos. Über den analogen Fernsteuerungseingang des TD 1-200 kann mit Hilfe eines Frequenzgenerators der Piezo, z. B. mit einem Dreieckssignal, angesteuert werden. Die Ansteuerungsspannung beträgt dabei 0 bis 10 V . Bei den Einstellungen am Frequenzgenerator muss daher darauf geachtet werden, dass der Offset stets der halben eingestellten Spannung entspricht. Bei einer Übersteuerung des Piezos leuchtet am TD 1-200 eine rote Warnleuchte auf.

Piezoelektrischer Effekt und Hysterese

Die gerichtete Verformung des *piezoelektrischen Materials* erzeugt über die Verschiebung der Ladungsverteilung mikroskopische Dipole innerhalb der Elementarzellen. Der Effekt kann am einfachsten an einem Quarzgitter, wie in Abbildung 22 dargestellt, veranschaulicht werden. Die Summation aller ausgebildeten dipolinduzierten Feldstärken des Kristalls führen zu einer messbaren Spannung. Umgekehrt kann beim sog. *reziproken Piezoeffekt* über ein induziertes elektrisches Feld der Kristall verformt werden.

Abb. 22: Schematische Darstellung des piezoelektrischen Effekts am Beispiel eines α -Quarzkristalls. Dargestellt ist das entlastete Gitter des Quarzkristalls (links) und der belastete Kristall (rechts). Aufgrund der gerichteten Belastung kommt es zu einer Verschiebung der Schwerpunktladungen und zur Ausbildung eines elektrischen Feldes.

Piezoelektrische Eigenschaften zeigen sich bei Kristallen, wie z. B. α -Quarz oder Turmalin und bestimmten Keramiken, wie Blei-Zirkonat-Titanat (PZT).³⁰ Der beobachtbare Effekt ist bei Kristallen jedoch deutlich kleiner, sodass bei piezoelektrischen Bauteilen auf Keramiken zurückgegriffen wird. Im Falle des Aktuators *Linos Photonics PV 10-80* wurden zwei Piezostapel (Stacks) aus übereinandergeschichteten piezokeramischen Scheiben verbaut.

Keramiken weisen ein typisches Hystereseverhalten auf. Die Hysterese basiert auf kristallinen Polarisierungseffekten im Kristallgitter und ist im Wesentlichen von der Längenänderung des Aktuators abhängig. Besonders deutlich werden die Hystereseeffekte nahe der Umkehrpunkte in der Bewegungsrichtung. Sie führen zu einem abgeflachten Verlauf des Verschiebewegs Δs in Abhängigkeit von der angelegten Spannung U . Zusätzlich treten Kriecheffekte aufgrund der Umorientierung der Kristalldomänen auf.³¹ In Abbildung 23 ist der durch die Hysterese beeinflusste Verlauf des Verschiebewegs $\Delta s(U)$ für zwei verschiedene maximale Ansteuerspannungen dargestellt.

³⁰vgl.: Homepage: Piezosystem Jena [27]

³¹vgl.: N. Stockhausen [17], S.2f

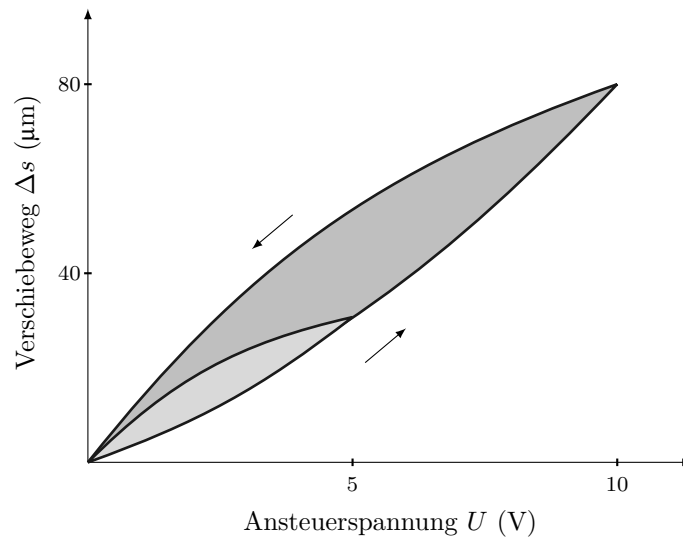


Abb. 23: Hin- und zurücklaufender Verschiebeweg Δs des Piezos in Abhängigkeit von der Ansteuerspannung U im unregulierten Modus. Dargestellt ist ein Verlauf von 0 bis 10 V (dunkelgrau) und ein zweiter Verlauf von 0 bis 5 V (hellgrau). Die Spannungswerte sowie der maximale Verschiebeweg orientieren sich an dem verwendeten Piezo von Linos.

Die Hysterese kann mit Hilfe eines positionsgeregelten Modus (geregelter Modus) korrigiert werden, sodass ein linearer Verlauf des Verschiebeweges $\Delta s(U)$ erzeugt wird. Die Positionsregelung wird über einen Sensor realisiert, der den Istwert der Verschiebung misst und so eine Korrektur der Spannungsregelung ermöglicht.

Strahlteilerwürfel

Wesentlicher Bestandteil des Interferometeraufbaus ist der Strahlteiler, welcher ein Teilungsverhältnis von 50:50 haben sollte. Für den Versuchsaufbau wurde ein nicht polarisierender Strahlteilerwürfel verwendet, der aus zwei rechtwinkligen Prismen besteht und eine Kantenlänge von $a = 2$ cm hat.

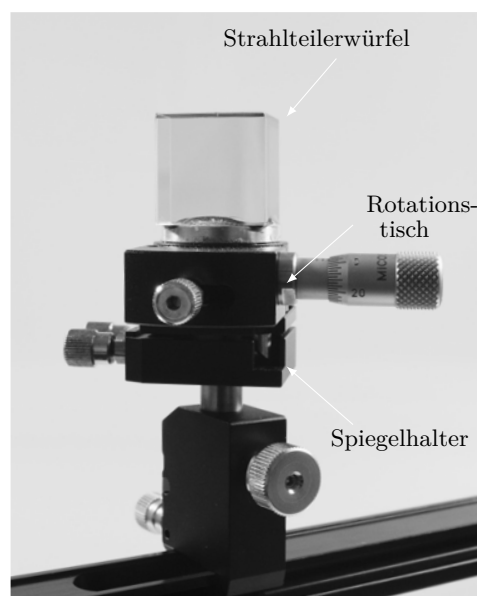


Abb. 24: Montierter Strahlteilerwürfel.

Die Kontaktfläche der Prismen ist mit einer dünnen dielektrischen Beschichtung versehen. In Abbildung 24 ist der montierte Strahlteiler abgebildet. Der Würfel wurde auf einem Rotationstisch geklebt, welcher um 360° in der Vertikalachse verdrehbar ist und für die feinere Justage mit Hilfe einer Mikrometerschraube um $\pm 9^\circ$ in $0,032^\circ$ -Schritten gedreht werden kann. Zusätzlich wurde unter den Rotationstisch ein in der Längs- und Querachse verstellbarer Spiegelhalter montiert. Der Aufbau erlaubt es nun den Strahlteilerwürfel in sämtlichen Freiheitsgraden auszurichten, was für die spätere Justage von großem Vorteil ist. Ebenso hätte der Aufbau auch mit Hilfe einer Strahlteilerplatte (50:50) realisiert werden können. Da diese allerdings beim reflektierten Anteil des Lichts einen Phasensprung erzeugt, muss im entsprechenden Arm des Interferometers eine zusätzliche Kompensationsplatte parallel dazu ausgerichtet werden. Im Strahlteilerwürfel hingegen durchläuft das Licht im Falle der Weisßlichtposition stets den selben optischen Weg.

Glasplatte

In Abschnitt 3.8 wurde das Verfahren zur Bestimmung der Brechzahl transparenter Objekte erläutert. Für die Vermessung wurde eine Glasplatte der Dicke $d = 2,5$ mm ausgewählt, deren Brechungsindex im Vorfeld nicht bekannt war. Um eine möglichst genaue Messung des Brechungsindex zu erreichen, ist es wichtig, dass die planparallele Grenzfläche der Glasplatte orthogonal zum einfallenden Laserstrahl positioniert wird. Für die Glasplatte wurde daher ein Aufbau analog zum Strahlteilerwürfel gewählt. In Abbildung 25 ist die fertig montierte Glasplatte abgebildet.

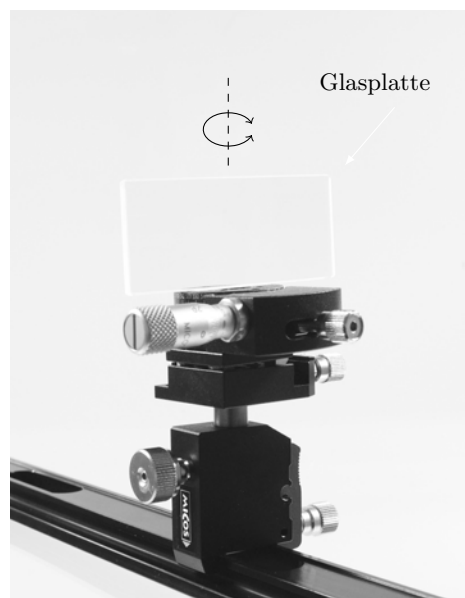


Abb. 25: Montierte Glasplatte.

Die Glasplatte konnte vorerst nur provisorisch mit doppelseitigem Klebeband auf dem Rotationstisch befestigt werden. Für Messungen im Rahmen des Fortgeschrittenen-Praktikums ist daher die Anfertigung einer passenden Klemmhalterung erforderlich.

Photodiode

Die Aufnahme der Interferogramme erfolgt über eine empfindliche Photodiode mit integriertem Operationsverstärker und einer linearen Kennlinie über mindestens zwei Größenordnungen. Die dabei verwendete Diode ist in Abbildung 26 dargestellt und wurde im Rahmen der Masterarbeit von Jan Eggemann zusammengebaut.³² Die verbaute Photodiode mit der Bezeichnung OPT301 wurde in einem Gehäuse mit einer vorgeschalteten Irisblende eingebaut und besitzt eine $2,29 \times 2,29$ mm große sensitive Fläche.³³ Die Blende dient dazu Streulicht auszublenden und zusätzlich den effektiven Messbereich zu verkleinern. Auf diese Weise kann der Kontrast des Interferogramms mit einer höheren Genauigkeit vermessen werden.

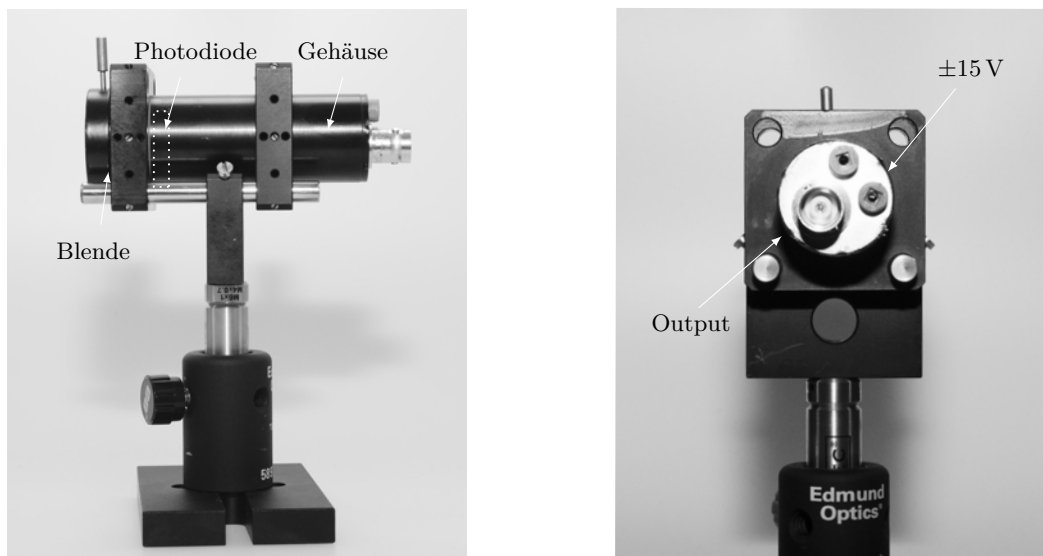


Abb. 26: Photodiode OPT301 in der Seitenansicht (links) und der Ansicht von Hinten (rechts).

Die Diode arbeitet mit einer Betriebsspannung von ± 15 V und einem Ruhestrom von 0,4 mA. Zudem besitzt sie in einem Bereich von 600 bis 900 nm die höchste Sensitivität, während im Bereich von 250 bis 450 nm die Sensitivität gerade einmal die Hälfte der maximalen Empfindlichkeit beträgt. Das Signal der Diode wird anschließend über ein Koaxialkabel mit Hilfe eines CASSY-Systems gemessen.

Für spätere Messungen ist es vorteilhaft, wenn die Photodiode nicht in das Moskito-System integriert wird, sondern außerhalb der Platte positioniert werden kann. Dies liegt darin begründet, dass das Interferenzbild zur optischen Achse verschoben sein kann und eine in der Höhe verstellbare und frei bewegliche Photodiode leichter in das Zentrum des Interferenzbildes gebracht werden kann.

³²vgl.: J. Eggemann (2014) [6], Kapitel 4.3

³³vgl.: Datenblatt OPT301 auf der Homepage URL <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/opt301.pdf>.

Halterung der Leuchtdioden und Linsensysteme

Für den Aufbau werden insgesamt vier verschiedene Lichtquellen verwendet: Ein He-Ne-Laser, eine weiße und eine rote LED sowie eine Natriumdampfampe. Bis auf den Laser handelt es sich um ausgedehnte Lichtquellen, deren Licht vor der Einkopplung in das Interferometer mit einem System aus Linsen möglichst parallel gemacht werden muss. Es wurde daher eine Halterung gebaut, auf welcher sowohl die LEDs als auch die notwendigen Linsen flexibel positioniert werden können. In [Abbildung 27](#) ist der Aufbau abgebildet.

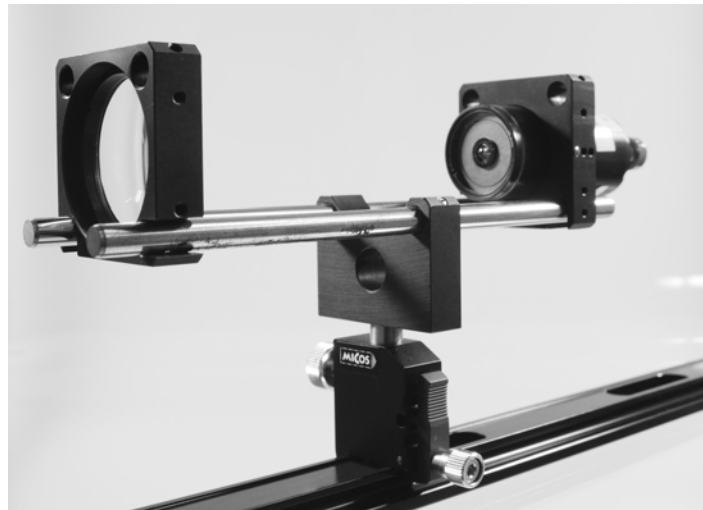


Abb. 27: Halterung für LEDs und Linsen.

Das im Praktikum vorhandene Mikrooptik-System bietet ein großes Sortiment an Linsen und Halterungen, mit denen eine Vielzahl verschiedener optischer Aufbauten realisiert werden kann. Es ist daher empfehlenswert im Rahmen eines Aufbaus für das Fortgeschrittenenpraktikum das Moskito-System mit entsprechenden Fassungen für Linsen ($\varnothing 25$ mm und $\varnothing 30$ mm) auszustatten. Gerade in Hinblick auf den Einsatz der vorhandenen (großen) Natriumdampfampe ist die Verwendung von Linsen mit großen Durchmessern ($\varnothing 30$ mm) notwendig, um mögliche Intensitätsverluste und Streulicht zu verhindern.

5 Grundlegende Messungen und Kalibrierungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Messungen zum Michelson-Interferometer erläutert. Die Ergebnisse dieser Messungen bilden das Fundament für die spätere Auswertung der Interferogramme. Dazu zählt die Aufnahme der Kalibrierungskurven des Piezoverstellers und die Aufnahme und Analyse der Spektren der verwendeten Lichtquellen sowie der drei verwendeten Interferenzfilter. Unter Verwendung des He-Ne-Lasers werden zudem die im Interferometer vorliegenden Polarisations Ebenen gemessen und zusätzlich die Ringsysteme für verschiedene Gangunterschiede Δs aufgenommen.

5.1 Spektrum und Polarisation des He-Ne-Lasers

Für die Erstellung der Kalibrierungskurve ist die genaue Kenntnis der Wellenlänge des verwendeten Lasers notwendig. Das Licht des He-Ne-Lasers wurde daher mit dem Spektrometer (HR2000) vermessen. Das aufgenommene Spektrum in Abbildung 28 zeigt eine verschobene Peakwellenlänge bei $\lambda = 631,62$ nm. Die für den He-Ne-Laser charakteristische Wellenlänge des $3s \rightarrow 2p$ -Übergangs liegt bei $\lambda = 632,8$ nm.

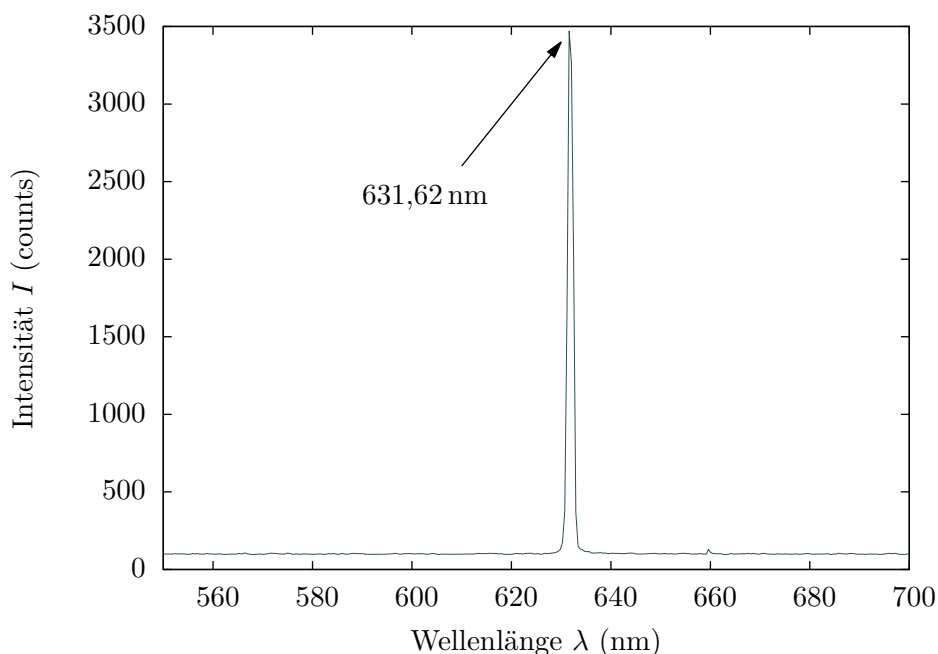


Abb. 28: Spektrum des He-Ne-Lasers. Diese Laserlinie zeigt eine verschobene Peakwellenlänge bei $\lambda = 631,62$ nm.

Die Messung wurde mehrfach wiederholt, ohne dass sich das Ergebnis veränderte. Die Ursache für die Verschiebung liegt vermutlich an der Kalibrierung des konfektionierten Spektrometers. Für die weitere Auswertung wird die Wellenlänge $\lambda = 632,8$ nm aus den Herstellerangaben verwendet. Der He-Ne-Laser ist linear polarisiert. In Abbildung 29 ist der gemessene Intensitätsverlauf in Abhängigkeit vom Drehwinkel θ eines Polarisationsfilters (Analysators) in Polarkoordinaten dargestellt. Die Intensität wurde mit Hilfe einer Photodiode gemessen und normiert.

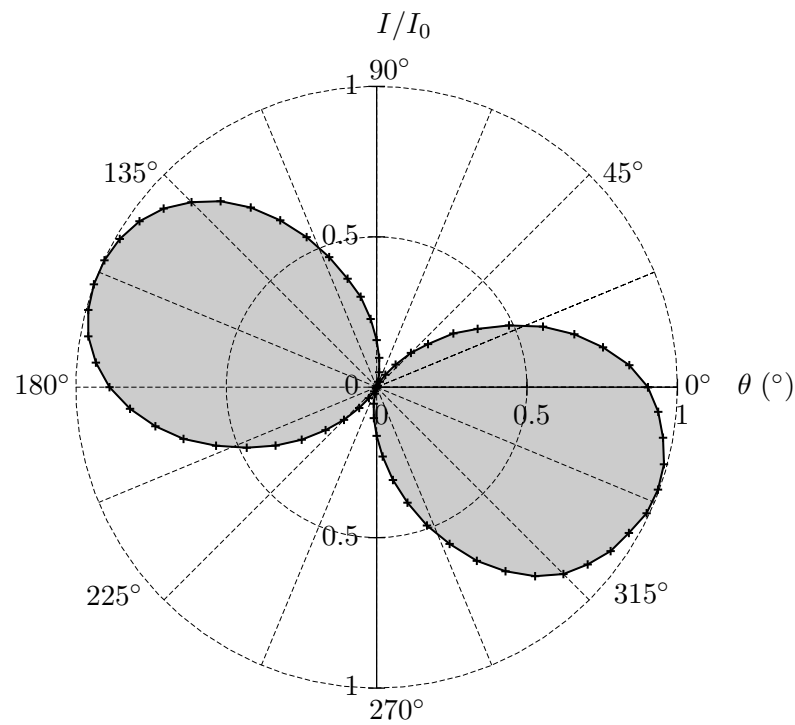


Abb. 29: Darstellung $I = I(\theta)$ zur Charakterisierung der Polarisation des He-Ne-Lasers.

Die Polarisation des Laserlichts ist in der y,z -Ebene um $\theta_{\text{HeNe}} \approx 157^\circ$ verkippt. Da die Spiegel im Interferometer einen Einfluss auf die Orientierung des linear polarisierten Laserlichts haben, wurde die Polarisation jeder reflektierten Welle mit dem Polarisationsfilter bestimmt und die Änderung in Abbildung 30 schematisch dargestellt.

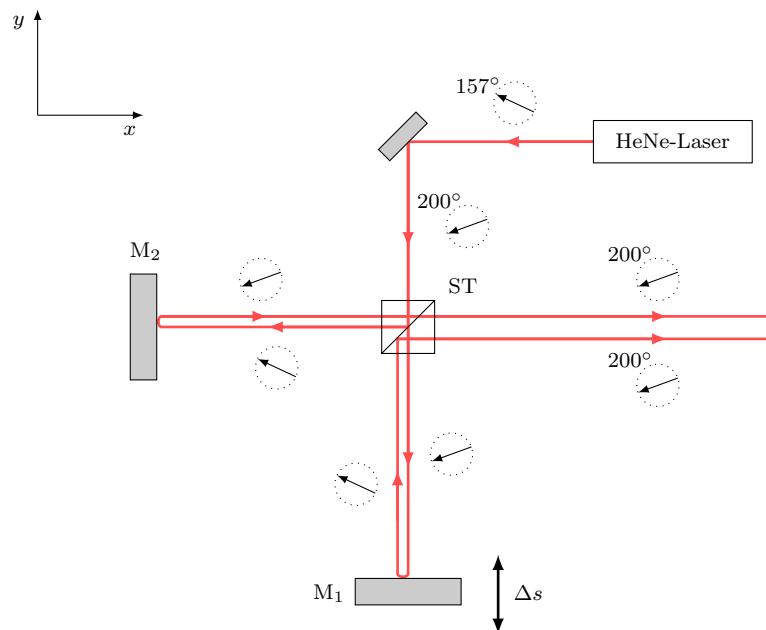


Abb. 30: Änderung der Polarisationsrichtung im Michelson-Interferometer.

Bei der Reflexion an den Spiegeln und im Strahlteiler wird die Orientierung der linear polarisierten Welle um $\pm 43^\circ$ gedreht. Da die beiden Teilwellen im Interferometer die gleichen Richtungsänderungen erfahren, sind die Polarisationsrichtungen bei der letztlichen Überlagerung stets gleich. In den Spezialfällen $\theta_{\text{HeNe}} = \{0^\circ, 90^\circ\}$ des eingekoppelten Laserlichts ändert sich

die Richtung der Polarisation bei der Reflexion an den Spiegeln und im Strahlteiler nicht.

Die Ursache für die Änderung in der Orientierung hängt mit den Eigenschaften der linear polarisierten Welle bei der Reflexion an metallischen Oberflächen zusammen. Für die Beschreibung an einer Grenzfläche Luft-Metall, müssen hierbei die Fresnelformeln unter Berücksichtigung des komplexen Brechungsindex des verwendeten Metalls berücksichtigt werden.³⁴ Für eine einfallende Welle resultiert so eine Änderung der Phase und der Amplitude nach der Reflexion in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Der Phasensprung der einfallenden und reflektierten Welle kann dabei Werte zwischen 0 und π annehmen. Bei der Betrachtung einer linear polarisierten Welle äußern sich diese Änderungen in der Orientierung der Polarisationsebene.³⁵ Es ist jedoch sonderbar, dass die Änderung der Orientierung sowohl bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 45^\circ$ als auch bei 180° bis auf ein Vorzeichen die Gleiche ist.

³⁴vgl.: W. Demtröder (2009) [3], S.238ff

³⁵Für eine genauere mathematische Beschreibung der verschiedenen Polarisationen, siehe: J. Eggemann (2014) [6], Kapitel 3.3

5.2 Interferenzringe mit dem He-Ne-Lasern

Der Aufbau des Michelson-Interferometers mit einem He-Ne-Laser als Lichtquelle wurde in Kapitel 4.2 ausführlich beschrieben. Aufgrund der hohen Kohärenz des Laserlichts kann mit dem He-Ne-Laser und einer Linse ein kontrastreiches und feinringiges Ringsystem als Interferenzbild erzeugt werden. Infolge der hohen Kohärenzlänge, kann zudem die Armlänge des Interferometers bis auf das Maximum der vom Aufbau her möglichen Weglängendifferenz variiert werden. Je höher die optische Wegdifferenz $\Delta\tilde{s}$ ist, desto mehr Ringe können beobachtet werden. In Abbildung 31 sind die Interferenzringe für vier verschiedene Gangunterschiede $\Delta s > 0$ der Spiegel dargestellt.

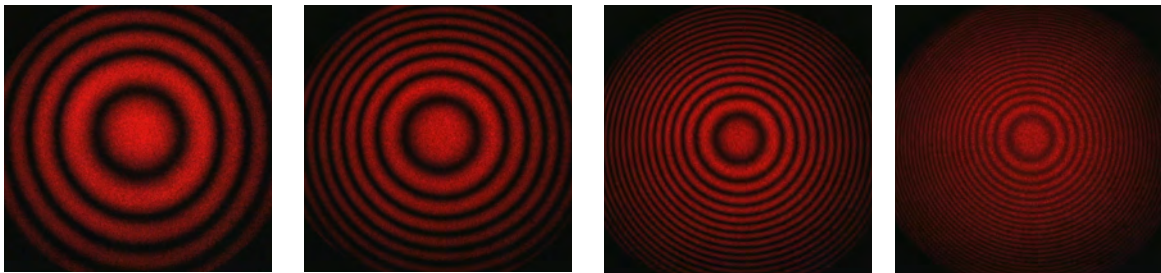


Abb. 31: Interferenzringe für vier verschiedene Wegunterschiede $\Delta s > 0$. Der Spiegelabstand Δs wird von links nach rechts größer.

Ist die Wegdifferenz zu groß, lassen sich aufgrund der hohen Verluste am Strahlteilerwürfel und an den Spiegeln nur noch im Zentrum des Interferenzbildes Ringe beobachten. Mit Hilfe eines zusätzlichen Umlenkspiegels lässt sich ein maximaler Wegunterschied Δs von ~ 70 cm erreichen. Im Gegensatz dazu können mit dem Piezoversteller die Ringe des HeNe-Lasers sehr fein durchfahren werden. In Abbildung 32 sind Interferenzbilder des Ringsystems für eine zurückgelegte optische Wegstrecke von $\Delta\tilde{s} \leq \lambda$ zu sehen.

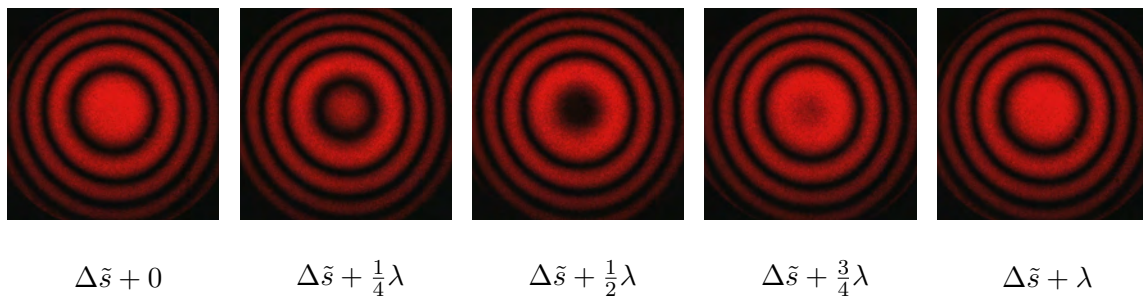


Abb. 32: Aufnahme des Verlaufs der Interferenzringe bei einem sich verändernden optischen Wegunterschied von insgesamt einer Wellenlänge λ .

Da die Wellenlänge des Lasers bekannt ist, kann mit Hilfe des Intensitätsverlaufs im Zentrum des Ringsystems der exakte Verschiebeweg Δs des Spiegels bestimmt werden.

5.3 Kalibrierungskurven des Piezoverstellers

Der Verschiebeweg Δs des Piezos kann über eine Kalibrierungskurve $\Delta s(U)$ in Abhängigkeit von der angelegten Spannung U am Piezoversteller berechnet werden. Es wird dabei ein Spannungsintervall ΔU durchfahren und mit einer Photodiode die durchlaufenden Maxima des Interferenzbildes gezählt. Nach Gleichung (3.50) hat der Piezo bei einem Durchgang von Maximum zu Maximum gerade eine Strecke $\lambda/2 = 316,4 \text{ nm}$ zurückgelegt. Der Verschiebeweg $\Delta s(U)$ kann damit eindeutig bestimmt werden. Da der Piezo einen *geregelten* und einen *ungeregelten* Modus besitzt (vgl. Kapitel 4.2), werden zwei Kalibrierungskurven aufgenommen. Der maximale Verschieberegion liegt in einem Intervall der Steuerspannung von 0 bis 10 V. Ein mit einem Frequenzgenerator erzeugtes Dreieckssignal mit der Frequenz von 0,011 Hz wird als Steuersignal verwendet. Der Piezo kann auch bei höheren Frequenzen gefahren werden. Ist die Frequenz jedoch zu hoch, entstehen hystereseebedingte Störungen im Kurvenverlauf. Überdies ist darauf zu achten, dass der Offset des Generators auf die Hälfte des maximalen Spannungssignals eingestellt ist, da ansonsten der Piezoregler in den Overloadbereich gerät. Bei zu hohen Spannungen besteht die Gefahr, dass die Piezokeramik nachhaltigen Schaden nimmt. In Abbildung 33 ist die Kalibrierungskurve im unregelmäßigem Modus dargestellt.

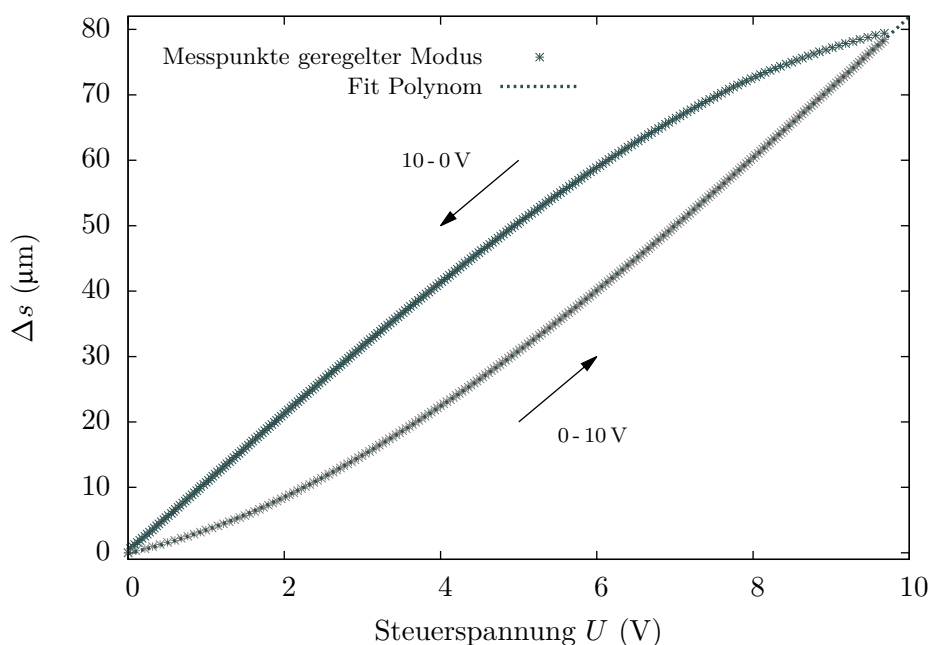


Abb. 33: Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0 – 10 V und einer Frequenz von $\nu = 0,011 \text{ Hz}$ im unregelmäßigem Modus. Es wurde nur der aufsteigende Verlauf angefitet.

Die Darstellung zeigt den für die Hysteresee typischen Kurvenverlauf in einem maximalen Durchfahrbereich von 0 bis $\sim 80 \mu\text{m}$. An den Umkehrpunkten 0 – 2 V und 8 – 10 V ist der Hystereseeffekt besonders stark ausgeprägt. Der Kurvenverlauf lässt sich mit einem Polynom dritten Grades recht genau anfiten. Für den aufsteigenden und abfallenden Ast ergeben sich

die Funktionen

$$\Delta s_{\text{Auf}}(U) = -0,027 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}^3} \cdot U^3 + 0,811 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}^2} \cdot U^2 + 2,82 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}} \cdot U - 0,12 \mu\text{m} \quad (5.1)$$

$$\Delta s_{\text{Ab}}(U) = -0,033 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}^3} \cdot U^3 + 0,084 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}^2} \cdot U^2 + 10,45 \frac{\mu\text{m}}{\text{V}} \cdot U - 0,29 \mu\text{m}, \quad (5.2)$$

wobei ein Fehler von $\Delta s = \mp 0,001 U^3 \pm 0,003 U^2 \pm 0,01 U \mp 0,02$ berücksichtigt werden muss. Zum Vergleich wurde eine zweite Kalibrierungskurve bei einer Frequenz von $\nu = 0,42$ Hz aufgenommen.³⁶ Der Verlauf der Kurven ist nach unten hin verschoben und weist erste Störungen auf. Bei allen nachfolgenden Messungen wird daher eine Frequenz von $\nu = 0,011$ Hz verwendet. Im geregelten Modus steuert der Piezoregler den Kristall so an, dass die Hystereseeffekte ausgeglichen werden und ein linearer Zusammenhang zwischen angelegter Spannung und Verschiebeweg erzeugt wird. In Abbildung 34 sind die linearen Verläufe des hin- und zurücklaufenden Spiegels dargestellt.

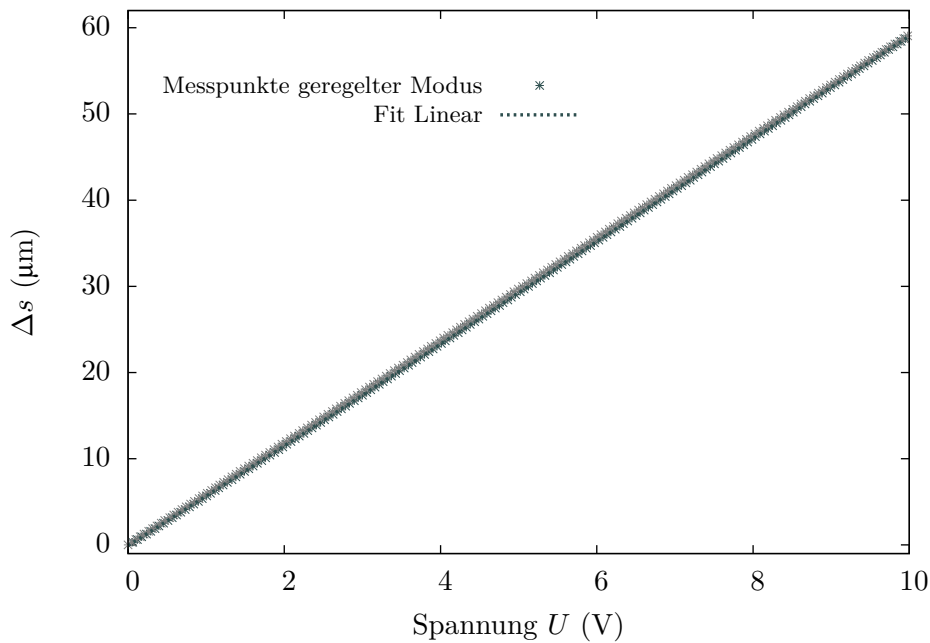


Abb. 34: Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0 – 10 V und einer Frequenz von $\nu = 0,011$ Hz im geregelten Modus. Es wurde nur der aufsteigende Verlauf angefitet.

Im Gegensatz zum unregulierten Modus liegt die maximal zurückgelegte Wegstrecke des Spiegels bei $\sim 60 \mu\text{m}$. Die Kurven des hin- und zurücklaufenden Wegs sind zudem nahezu identisch, sodass bei der Fahrtrichtung des Spiegels nicht unterschieden werden muss. Die Fit-Funktion hat die Form

$$\Delta s_{\text{Regel}}(U) = (5,943 \pm 0,002) \frac{\mu\text{m}}{\text{V}} \cdot U - (0,34 \pm 0,01) \mu\text{m}, \quad (5.3)$$

wobei für die optische Wegdifferenz der Zusammenhang $\Delta \tilde{s}(U) = 2\Delta s(U)$ berücksichtigt werden muss.

³⁶Siehe im Anhang S.60, Abbildung 60

5.4 Spektren der LEDs und Interferenzfilter

Für die spätere Auswertung werden die Spektren der roten und der weißen LED sowie die Spektren der Interferenzfilter (IF) mit 436, 546 und 589 nm aufgenommen und diskutiert. Es sollen zudem die charakteristischen Merkmale der Spektren, die Mittelpunktswellenlängen λ_{Spek} und die Halbwertsbreiten $\text{FWHM}_{\text{Spek}}$ der Lichtquellen und Filter bestimmt werden.

Spektrum der roten LED

Das mit dem Spektrometer HR2000 gemessene Spektrum der roten LED ist in Abbildung 35 dargestellt. Mehrere Messungen des Spektrums haben gezeigt, dass die Mittelpunktswellenlänge λ_{Spek} der roten LED, je nach Höhe der eingestrahelten Intensität, zwischen 632 und 634 nm liegt. Die Ungenauigkeiten sind vermutlich auf die Sensorempfindlichkeit des Spektrometers zurückzuführen.

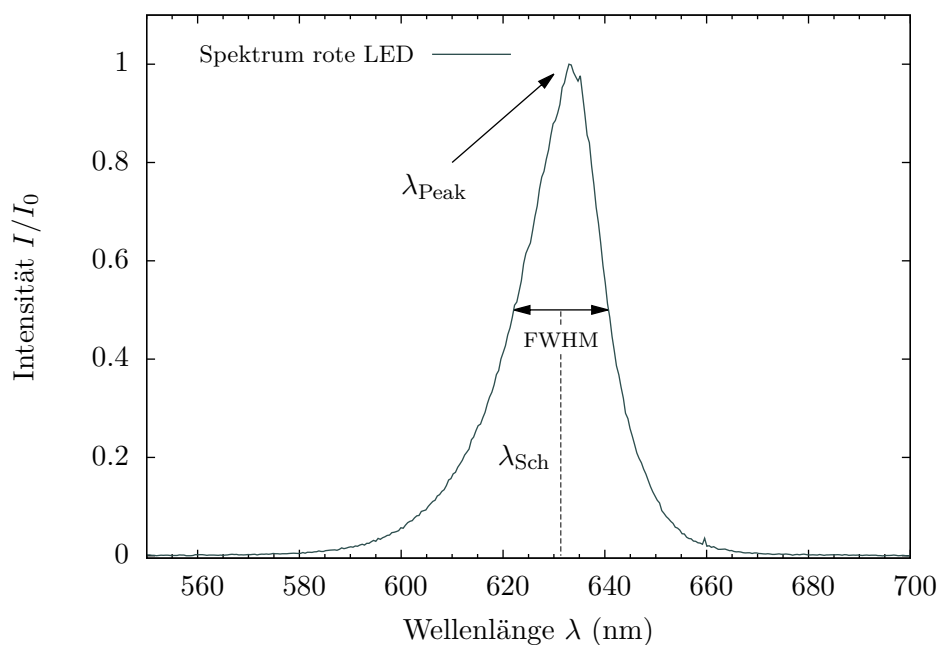


Abb. 35: Normiertes Spektrum der roten LED. Es wurden zusätzlich die Halbwertsbreite FWHM, die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} eingezeichnet.

Das Spektrum in Abbildung 35 wird in erster Linie durch drei Parameter charakterisiert. Zum einen über die Halbwertsbreite FWHM, welche direkt aus dem Verlauf des Spektrums an der Stelle $I_{\text{max}}/2$ abgelesen werden kann. Zum anderen über die Peakwellenlänge λ_{Peak} , welche die Wellenlänge bei maximaler Intensität des Spektrums bezeichnet sowie die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} , die im Folgenden vereinfacht über das Zentrum der Halbwertsbreite definiert wird. Für das Spektrum der roten LED wurden folgende Wellenlängen gemessen

$$\lambda_{\text{Peak}} \approx (633,0 \pm 0,5) \text{ nm} \quad \lambda_{\text{Sch}} \approx (631,4 \pm 0,3) \text{ nm} .$$

Die Halbwertsbreite beträgt $\text{FWHM} \approx (18,5 \pm 0,2) \text{ nm}$. Die Differenz zwischen der Schwerpunkts- und Peakwellenlänge zeigt die leichte Asymmetrie des Verlaufs auf.

Emissionsspektrum der weißen LED und Transmissionspektren der I-Filter

Neben einer roten LED wurde auch das Spektrum einer weißen LED sowie die Transmissionspektren von drei Interferenzfiltern (IF) mit den Wellenlängen 436, 546 und 589 nm mit der weißen LED als Lichtquelle aufgenommen.³⁷ Die einzelnen Spektren sind in Abbildung 36 dargestellt.³⁸ Die weiße LED besitzt einen starken blauen Anteil bei 448 nm und ein breites Maximum im grünen Wellenlängenbereich zwischen 530 und 545 nm.

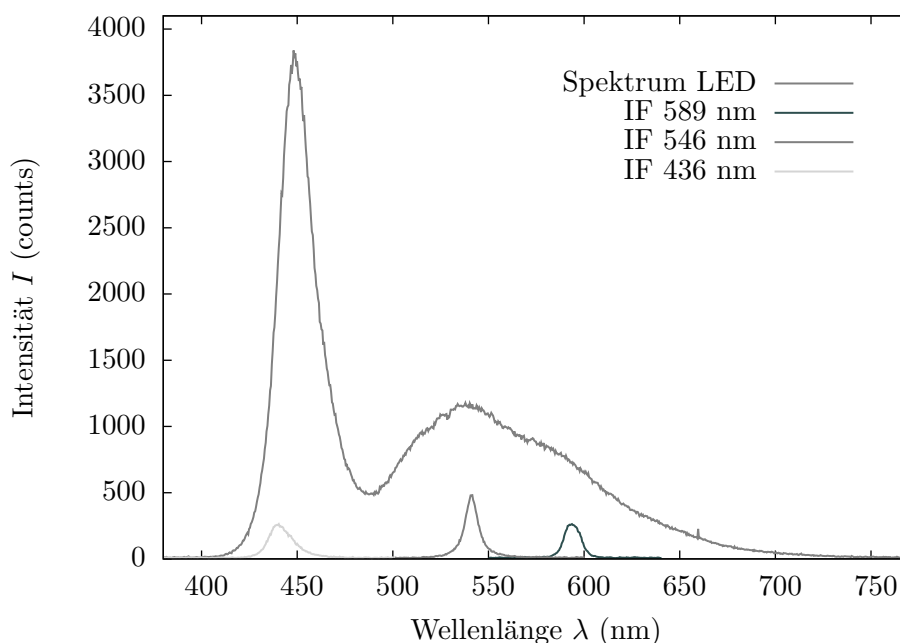


Abb. 36: Emissionsspektrum der weißen LED und Transmissionspektren der Interferenzfilter mit 436, 546 und 589 nm.

Obwohl sich zwei der Filter nahe dieser Maxima befinden, liegt die durch die Filter transmittierte Intensität der weißen LED bei etwa 50% der eingestrahltten Intensität. Interferenzfilter können in ihrer Funktionsweise als teilverspiegelte Fabry-Pérot-Resonatoren beschrieben werden.³⁹ Die transmittierte Intensität ist von der Reflektivität der verwendeten dielektrischen und metallischen Verspiegelungen und damit von der sog. Finesse \mathcal{F} abhängig. Die relativen Transmissionspektren im Anhang S.93 liefern die in Tabelle 1 aufgelisteten maximalen Transmissionsgrade T der Filter.

Tabelle 1: Wellenlängen der roten LED und der Filter.

I-Filter	Wellenlänge λ_T (nm)	Max. Transmission $T(\lambda_T)$ (%)
IF $\lambda=436$	$431,7 \pm 0,5$	$20,8 \pm 0,8$
IF $\lambda=546$	$541,1 \pm 0,2$	$46,4 \pm 0,5$
IF $\lambda=589$	$594,1 \pm 0,2$	$43,0 \pm 0,5$

³⁷Die Messung erfolgte ebenfalls mit dem Spektrometer HR2000.

³⁸Die Spektren der einzelnen Interferenzfilter sind im Anhang S.91f in Abbildung 63 bis 65 beigefügt.

³⁹Genauere Informationen zur Funktion des Fabry-Pérot-Resonators, siehe: J. Kehlbeck (2012) [10], S.12

In Abbildung 37 sind die Spektren der IF aus Abbildung 36 nochmals vergrößert dargestellt. Während der Verlauf des IF mit 546 nm völlig symmetrisch ist, weist insbesondere das Spektrum des IF mit 436 nm auf der linken Seite eine sehr steil abfallende Flanke auf. Die Ursache hierfür ist vermutlich der Einfluss des Lichtspektrums der weißen LED auf das Transmissionspektrum des Filters.

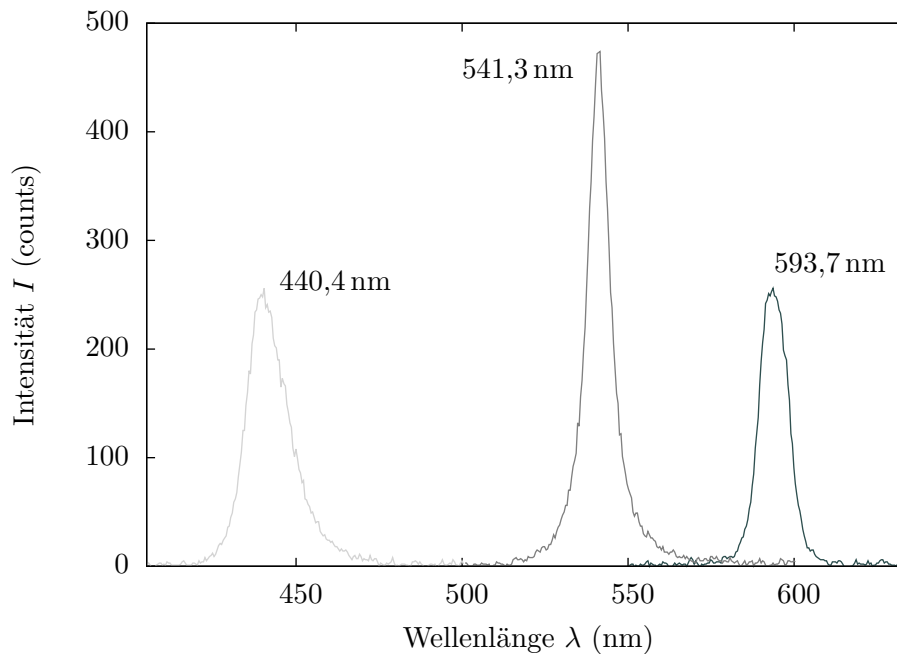


Abb. 37: Spektren der Interferenzfilter mit den Wellenlängen 436, 546 und 589 nm. Lichtquelle ist die weiße LED.

Aus den Verläufen lassen sich nun die Schwerpunkswellenlängen und die Halbwertsbreiten $\text{FWHM}_{\text{Filter}}$ der Transmissionsverläufe bestimmen, welche in Tabelle 2 aufgelistet sind.

Tabelle 2: Schwerpunkswellenlängen λ_{Sch} , Peakwellenlängen λ_{Peak} und Halbwertsbreiten $\text{FWHM}_{\text{Filter}}$ der Transmissionspektren der Interferenzfilter.

I-Filter	λ_{Sch} (nm)	λ_{Peak} (nm)	$\text{FWHM}_{\text{Spek}}$ (nm)
IF $\lambda = 436$	$441,6 \pm 0,3$	$440,4 \pm 0,5$	$14,1 \pm 0,2$
IF $\lambda = 546$	$541,2 \pm 0,3$	$541,3 \pm 0,5$	$7,9 \pm 0,2$
IF $\lambda = 589$	$593,9 \pm 0,3$	$593,7 \pm 0,5$	$10,0 \pm 0,2$

Die gemessenen Schwerpunkswellenlängen der Filter weichen in allen drei Fällen um etwa ± 5 nm von den Herstellerangaben ab. Insbesondere der Vergleich der Schwerpunkswellenlänge λ_{Sch} mit der Wellenlänge des Transmissionsmaximums λ_{T} des IF mit 436 nm zeigt den großen Einfluss des Emissionsspektrums der LED auf die Lage des Transmissionsmaximums des Filters. Eine genauere Analyse des Einflusses vom Lichtspektrum auf das Transmissionspektrum des IF erfolgt in Kapitel 6.4.

6 Darstellung der Ergebnisse und Diskussion

In Kapitel 3.6 wurde der Zusammenhang zwischen der spektralen Verteilung $S(\nu)$ einer Lichtquelle und dem erzeugten Interferogramm im Interferometer erläutert. In diesem Kapitel werden mit Hilfe des Michelson-Interferometers Interferogramme einer roten und weißen LED sowie für drei verschiedene Interferenzfilter ausgewertet. Über die Einhüllende können so Rückschlüsse auf die Art der spektralen Verteilung gezogen werden und die Kohärenzlänge des Lichts bestimmt werden. Überdies werden die Doppellinie der Natriumdampfampe vermessen und die Axial-Moden eines grünen Halbleiterlasers untersucht. Abschließend wird die Brechzahl einer Glasplatte mit Hilfe des Interferometers bestimmt.

6.1 Messverfahren

Für die Aufnahme der Interferogramme wird eine Photodiode mit einer einstellbaren, kleinen Photodiode im Zentrum des Interferenzringsystems positioniert und der Gangunterschied Δs der Spiegel mit Hilfe eines Piezokristalls verändert. Es kann anschließend das zur Intensität $I(\Delta\tilde{s})$ proportionale Ausgangssignal der Photodiode gemessen werden. Der Piezo wird mit einem Frequenzgenerator (FG) angesteuert, welcher ein Dreieckssignal von 0 – 10 V und einer Frequenz von 0,011 Hz erzeugt. Der Piezo erreicht so eine durchfahrbare Strecke von $\Delta s \approx 60 \mu\text{m}$ bzw. optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s} \approx 120 \mu\text{m}$.⁴⁰ Der Piezo wird im geregelten Modus gefahren. Zur Auswertung des Messsignals dient ein CASSY-System, welches je nach Signalstärke der Photodiode mit einem Signalverstärker im μV -Bereich adaptiert werden kann. Sowohl das Signal des Frequenzgenerators als auch das der Photospannung können parallel mit CASSY aufgezeichnet werden. Ebenso ist es möglich die Signale mit einem Oszilloskop zu betrachten und zu messen. Bei der Inbetriebnahme der weißen LED lassen sich zusätzlich drei verschiedene (IF) der Wellenlängen $\lambda = 436, 546$ und 589 nm in den Aufbau integrieren. Um Fehler aufgrund der Hystereseeffekte des Piezos gering zu halten, sollte die Messung in einem Spannungsintervall von $(2 < U < 9) \text{ V}$ durchgeführt werden.

6.2 Versuchsaufbau und Justage

Für die Messung eines Interferogramms wird ein Versuchsaufbau gemäß Abbildung 38 gewählt. Die Erzeugung eines symmetrischen und kontrastreichen Interferenzbildes einer LED ist mit großem Aufwand verbunden. Es soll daher kurz erläutert werden, wie der Aufbau am besten realisiert werden kann. In einem ersten Schritt wird ein He-Ne-Laser in das Interferometer eingekoppelt und ein möglichst symmetrisches Interferenzbild erzeugt. Die Spiegel M_1 und M_2 sollten dabei relativ nahe am Strahlteilerwürfel positioniert werden, da die ausgehenden Lichtflecke der später zu verwendenden LEDs bei großen Abständen der Spiegel zu Intensitätsverlusten führen können. Anschließend wird mit Hilfe der Mikrometerschraube an Spiegel M_1 bestmöglich die Weißlichtposition des HeNe-Lasers gesucht. Aufgrund der hohen Kohärenz des Laserlichts kann die Weißlichtposition mit dem Auge nicht eindeutig ausgemacht werden. Es ist daher hilfreich auf die Laufrichtung der Ringe zu achten, die sich in der Weißlichtposition umkehrt. Wichtig ist, dass bei der feineren Justage ausschließlich der

⁴⁰vgl.: Kapitel 4.2, S.32

Spiegel M_2 verkippt wird. In einem zweiten Schritt wird eine Natriumdampflampe mit einer geringeren Kohärenzlänge verwendet, um die Weißlichtposition genauer zu bestimmen. Die Na-Dampflampe stellt eine deutlich ausgedehntere Lichtquelle dar, daher wird der Lichtkegel mit Hilfe einer plankonvexen Linse mit der Brennweite $f_1 = 100 \text{ mm}$ auf den Spiegel M_1 fokussiert.⁴¹ Nachdem die Weißlichtposition gefunden wurde, kann die LED eingekoppelt werden. Es wird dazu eine weitere plankonvexe Linse der Brennweite $f_2 = 100 \text{ mm}$ gemäß Abbildung 38 in den Strahlengang gestellt. Sollte nicht sofort eine Interferenzerscheinung zu beobachten sein, ist es ratsam zunächst vorsichtig die Position von M_1 mit Hilfe der Mikrometerschraube zu verändern und erst danach M_2 nachzujustieren. Da die LED nur in einem Bereich von $\Delta s \approx 50 \mu\text{m}$ sichtbare Interferenzerscheinungen zeigt, sollte Δs nur sehr vorsichtig verändert werden. Mit dem Interferometer und einer LED als Lichtquelle kann ein sehr kontrastreiches und symmetrisches Ringsystem erzeugt werden.

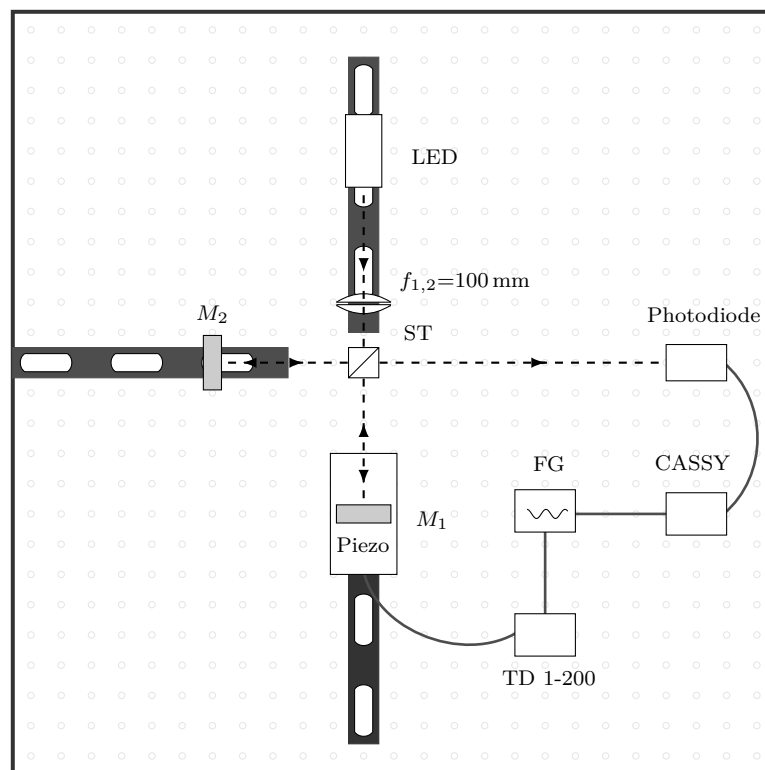


Abb. 38: Versuchsaufbau zur Interferogrammaufnahme einer LED.

⁴¹vgl.: Abbildung 72: Versuchsaufbau für eine Natriumdampflampe, Anhang S.96

6.3 Spektrale Untersuchung des Ringsystems einer roten und weißen LED im Michelson-Interferometer

Im Michelson-Interferometer wird das Licht einer spektral verbreiterten Quelle spektral zerlegt. Im Falle des Lichts einer Glühlampe mit einem stark verbreiterten Spektrum würde demnach ein Ringsystem aus verschiedenen farbigen Ringen als Interferenzmuster zu beobachten sein, die das Spektrum der Glühlampe wiedergeben. In Kapitel 3.5 wurde die Intensitätsverteilung $I(z, \lambda)$ für eine monochromatische Lichtquelle hergeleitet. Nach Gleichung (3.53) gilt, dass für konstruktive Interferenz der optische Wegunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der entsprechenden Wellenlänge sein muss. Bei einem festen Abstand Δs der Spiegel entsteht so bei einer spektral verbreiterten Lichtquelle ein Ringsystem mit einem kontinuierlichen Spektrum.⁴² Je größer die Wellenlänge λ_i , desto weiter ist der resultierende Ring im Interferenzbild nach Außen hin verschoben.

Im Falle der roten LED, dessen Spektrum eine Linienbreite in der Größenordnung von 20 nm aufweist, sollte eine spektrale Zerlegung im Interferenzbild mit dem Spektrometer messbar sein. In Abbildung 39 ist das Interferenzbild der roten LED für zwei verschiedene Gangunterschiede Δs gezeigt.

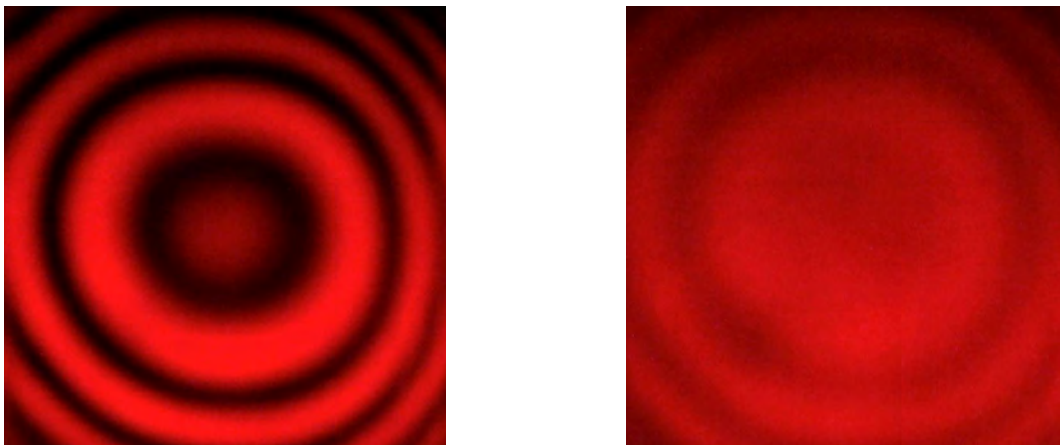


Abb. 39: Interferenzbild der roten LED bei einem Spiegelabstand $\Delta s \approx 0 \mu\text{m}$ nahe der Weißlichtposition (links) und einem Abstand $\Delta s \approx 20 \mu\text{m}$ (rechts).

Für die Messung wurde die sensitive Fläche des Lichtwellenleiters ($\varnothing 1 \text{ mm}$) eines Spektrometers HR2000 nahe des Maximums 0-ter Ordnung positioniert und das Spektrum für verschiedene Gangunterschiede $\Delta s_i > 0$ gemessen. In Abbildung 40 sind die Spektren für vier verschiedene Positionen $\Delta s_{i+1} < \Delta s_i$ dargestellt.

⁴²Ebenson tragen dispersive Effekte am Strahlteiler mit zu der spektralen Zerlegung bei.

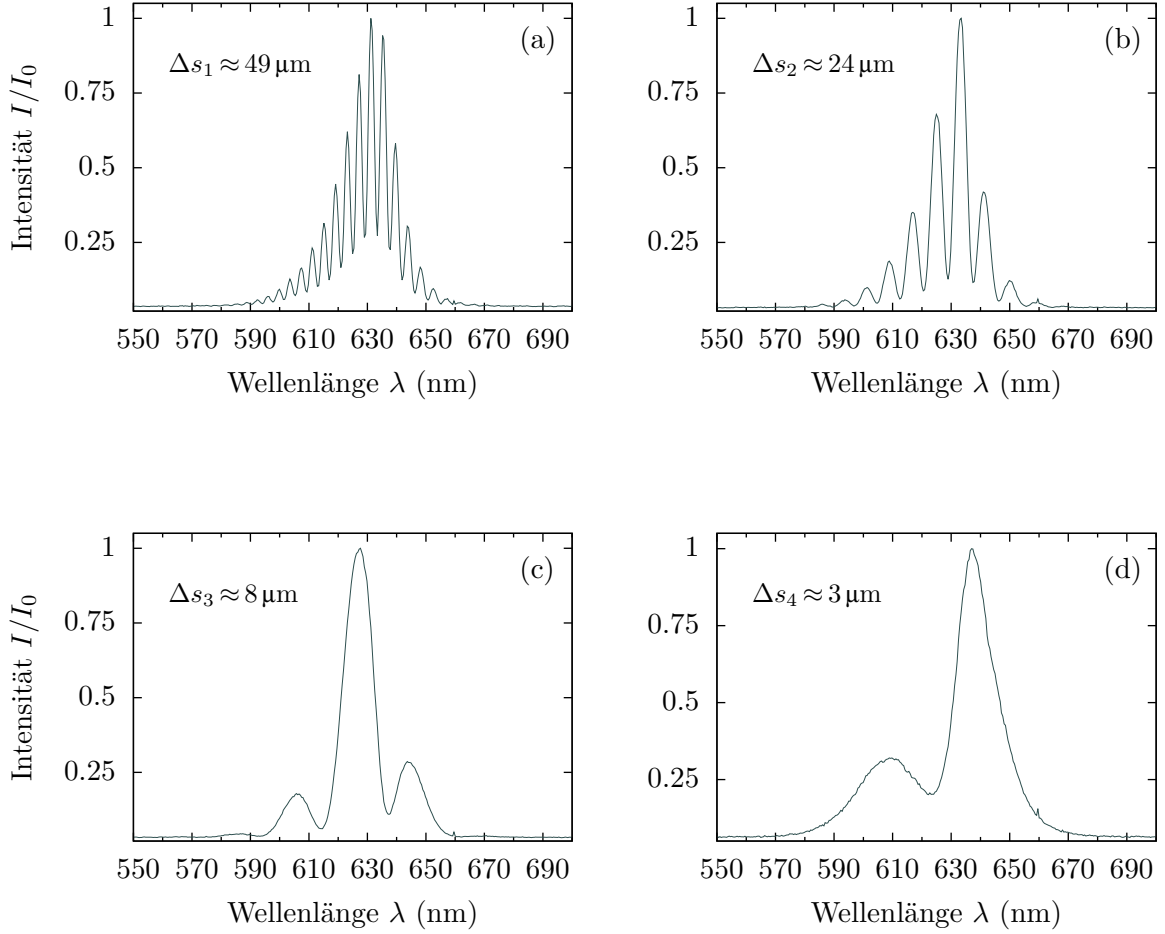


Abb. 40: Spektren eines Interferenzrings der roten LED bei vier verschiedenen Positionen $\Delta s_{i+1} < \Delta s_i$ hinter der Weißlichtposition.

Es wurde erwartet, dass für jeden Gangunterschied Δs die Spektren eine verschobene Schwerpunktswellenlänge zeigen. Die gemessenen Spektren zeigen jedoch eine vom Gangunterschied abhängige kammartige Zerlegung des Spektrums der LED auf. Je kleiner der Abstand zur Weißlichtposition ist, desto weniger Maxima werden im Spektrum sichtbar. Ist die Weißlichtposition erreicht, misst man das vollständige Spektrum der LED mit einer leichten Verschiebung der Mittelpunktswellenlänge λ_0 , da nicht direkt im Zentrum des Ringsystems gemessen wurde. Das Interferometer bildet mit den beiden Spiegeln M_1 und M_2 eine Analogie zu einem optischen Fabry-Pérot-Resonator der Dicke Δs . Dieser Quasiresonator fungiert als Kammfilter für bestimmte Wellenlängen, da er in Abhängigkeit von Δs nur bestimmte Moden erlaubt. Für die zulässigen Frequenzen $\Delta \nu$ der Moden im Resonator gilt

$$\Delta \nu = \frac{c}{2L} \quad (6.1)$$

mit der Resonatorlänge $L = \Delta s$. Mit Gleichung (3.14) gilt für den wellenlängenabhängigen Ausdruck zweier benachbarter Moden λ_i und λ_{i+1}

$$\Delta \nu_i = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda_i \lambda_{i+1}} = \frac{c}{2\Delta s_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta s_i = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{2\Delta \lambda_i} \quad (6.2)$$

Über die Abstände $\Delta\lambda_i$ der Moden kann demnach auf den mittleren Abstand der Spiegel $\Delta\bar{s}$ mit

$$\Delta\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta s_i \quad (6.3)$$

geschlossen werden. Die Modenabstände $\Delta\lambda_i$ aus den Spektren in Abbildung 40 wurden vermessen und der Spiegelabstand berechnet. In Tabelle 3 sind die mit der Mikrometerschraube gemessenen Spiegelabstände Δs_{Exp} und die theoretisch berechneten Werte aus den Modenabständen Δs_{Theo} zusammengefasst.

Tabelle 3: Mittlere Modenabstände $\Delta\bar{\lambda}$ und die daraus berechneten mittleren Spiegelabstände Δs_{Theo} sowie die gemessenen Abstände Δs_{Exp} der vier aufgenommenen Spektren.

Abb.	Moden $\Delta\bar{\lambda}$ (μm)	Δs_{Theo} (μm)	Δs_{Exp} (μm)
(a)	$3,9 \pm 0,2$	48 ± 2	49 ± 2
(b)	$7,9 \pm 0,4$	24 ± 1	24 ± 2
(c)	19 ± 1	11 ± 2	8 ± 2
(d)	27 ± 2	7 ± 3	3 ± 2

Die resultierenden Wegdifferenzen Δs_{Theo} aus den Modenabständen stimmen im Rahmen der Messungenauigkeiten mit den abgelesenen Werten sehr gut überein. Die unzureichend genaue Skala der Mikrometerschraube am Piezospiegel macht einen genaueren Vergleich jedoch nicht möglich. Die genauere Analyse der Resonatormoden erlaubt eine sehr präzise Lokalisierung der Weißlichtposition.

Die selbe Zerlegung des Spektrums konnte auch bei der weißen LED beobachtet werden. In Abbildung 41 sind exemplarisch die Spektren für zwei verschiedene Gangunterschiede $\Delta s_1 \approx 2 \mu\text{m}$ und $\Delta s_2 \approx 15 \mu\text{m}$ dargestellt.

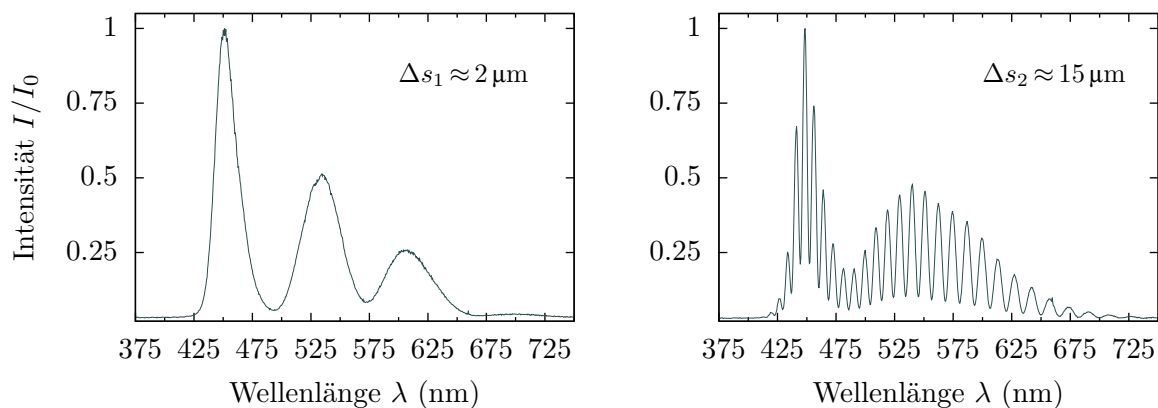


Abb. 41: Spektren eines Interferenzrings der weißen LED bei zwei verschiedenen Positionen $\Delta s_2 > \Delta s_1$ hinter der Weißlichtposition.

6.4 Interferogramme und Spektren

Interferogramm und Spektrum der roten LED

Das Interferogramm der roten LED wurde im Regelbetrieb des Piezos aufgenommen. Für die Messung wurde mit CASSY ein Messintervall von $t = 20$ s und ein Zeitabstand der Messpunktaufnahme von $\Delta t = 2$ ms gewählt und der Verlauf $I(U)$ aufgezeichnet. Diese Parameter sind auf die Einstellungen des Frequenzgenerators (erzeugt Dreieckssignal von 0 – 10 V mit einer Frequenz von 0,011 Hz) abgestimmt. Die Spannungswerte des Dreieckssignals werden anschließend mit Gleichung (5.3) auf die zurückgelegte optische Wegstrecke $\Delta \tilde{s}$ des Lichts umgerechnet. In Abbildung 42 ist das Interferogramm $I(\Delta \tilde{s})$ der roten LED dargestellt.

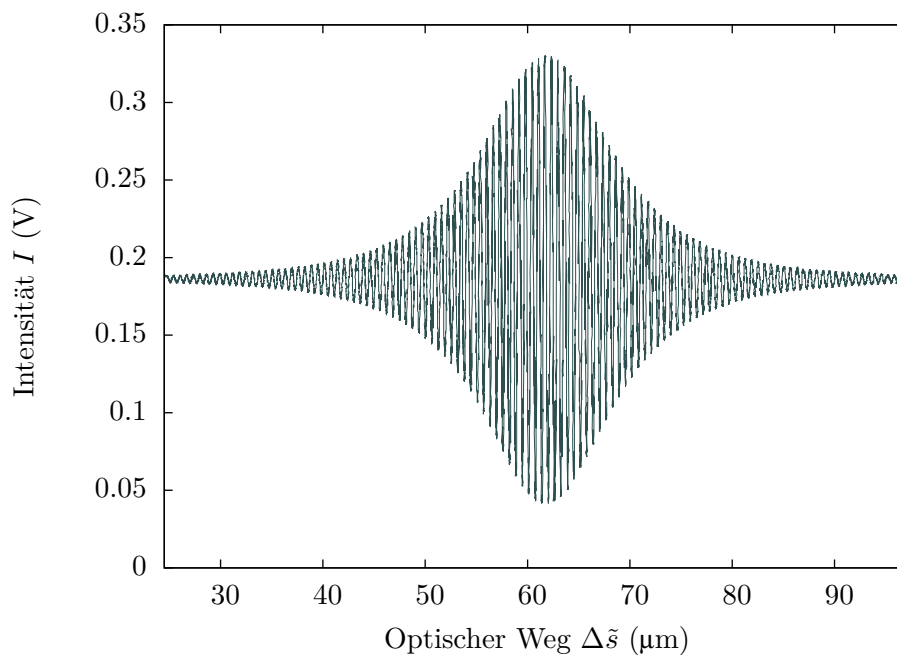


Abb. 42: Interferogramm einer roten LED über die optische Wegstrecke $\Delta \tilde{s}$. Der Piezo wurde im Regelbetrieb gefahren.

Aus dem Verlauf des Interferogramms bzw. der Einhüllenden in Abbildung 42 ist bereits zu erkennen, dass das im Folgenden daraus zu berechnende Spektrum der LED keine ideale Lorentzform besitzt, sondern eine zusätzliche inhomogen verbreiterte Komponente der Linienform haben muss.⁴³

Aus dem Interferogramm $I(\Delta \tilde{s})$ soll nun die Einhüllende $L(\Delta \tilde{s})$ bestimmt werden. Dazu werden aus den Messdaten mit Hilfe einer Peakanalyse sämtliche Maxima bestimmt. Für die Peakanalyse wurde ein Algorithmus in „OpenOffice-Calc“ geschrieben, welcher recht zuverlässig die lokalen Maxima herausfiltert. Eine manuelle Auslese der Datenpunkte ist aufgrund der kleinen Zeitabstände der Messung und der daraus resultierenden Doppelung vieler Messwerte nicht zu vermeiden. Aus der Anzahl der Maxima und der zurückgelegten optischen Wegstrecke kann zusätzlich die mittlere Wellenlänge der LED nach Gleichung (3.50) berechnet werden.

⁴³vgl. dazu die theoretisch zu erwartenden Interferogramme der idealen, natürlichen und dopplerverbreiterten Lichtquellen in Abbildung 14 und 15 (Kapitel 3.6).

Es gilt der Zusammenhang

$$\lambda_{\text{Intf}} = \frac{\Delta\tilde{s}}{n-1}. \quad (6.4)$$

Bei der Peakanalyse wurden insgesamt $n = 115$ in einem Intervall von $\Delta\tilde{s} = (72,4 \pm 0,2) \mu\text{m}$ gemessen. Damit beträgt die mittlere Wellenlänge des gemessenen Interferogramms $\lambda_{\text{Intf}} = (635,0 \pm 0,2) \text{ nm}$. Der normierte Verlauf der Einhüllenden $L(\Delta\tilde{s})$ ist in Abbildung 43 aufgetragen.

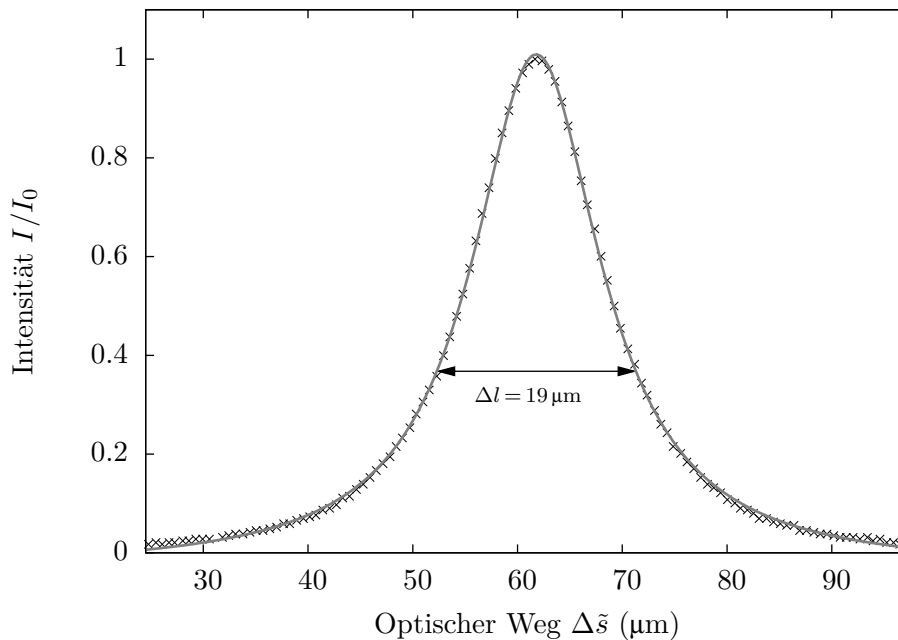


Abb. 43: Normierter Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms einer roten LED über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Die Kohärenzlänge beträgt $\Delta l = (19,0 \pm 0,1) \mu\text{m}$. Es wurde eine Lorentzfunktion angefitet.

Die aus der Peakanalyse bestimmten Messpunkte der Einhüllenden wurden anschließend gemäß Gleichung (3.28) mit einem Lorentzprofil der Form

$$L(s) = I_0 \left(\frac{h}{(\Delta\tilde{s} - s_0)^2 + (h/2)^2} \right) + L_0 \quad (6.5)$$

angefittet. Für die Auswertung wurde die Software „Gnuplot“ verwendet. Der Verlauf der lorentzförmigen Fit-Funktion in Abbildung 43 passt sich dem Verlauf der Messpunkte sehr gut an. Ein optimaler Fit würde über eine Faltung von Gauß- und Lorentzprofil, dem sog. *Voigt-Profil* erreicht werden. Der Korrekturanteil der Gaußfunktion am Randbereich ist jedoch so gering, dass für die weitere Auswertung die Lorentz-Funktion die geeignetere Wahl darstellt. Nach Kapitel 3.6 entspricht die Kohärenzlänge Δl der Lichtquelle dem zurückgelegten Wegunterschied, für den die Intensität der Einhüllenden auf $1/e$ abgefallen ist. Die Weglänge wurde mit Hilfe der angefitten Funktion ermittelt und beträgt

$$\Delta l = (19,0 \pm 0,1) \mu\text{m}. \quad (6.6)$$

Nach Gleichung (3.7) lässt sich über die Fouriertransformierte $f(\lambda^{-1})$ des Interferogramms das Spektrum der LED bestimmen. Für die Berechnung der Fouriertransformierten wird die Matlab ähnliche Software „Octave“ verwendet. Der Quellcode für die FFT ist im Anhang S.96 beigelegt. In Abbildung 44 ist die FFT und das mit dem Spektrometer aufgenommene Spektrum der LED dargestellt. Die Wellenzahlen der Abszisse der FFT wurden hierbei auf die Wellenlänge λ umgerechnet.

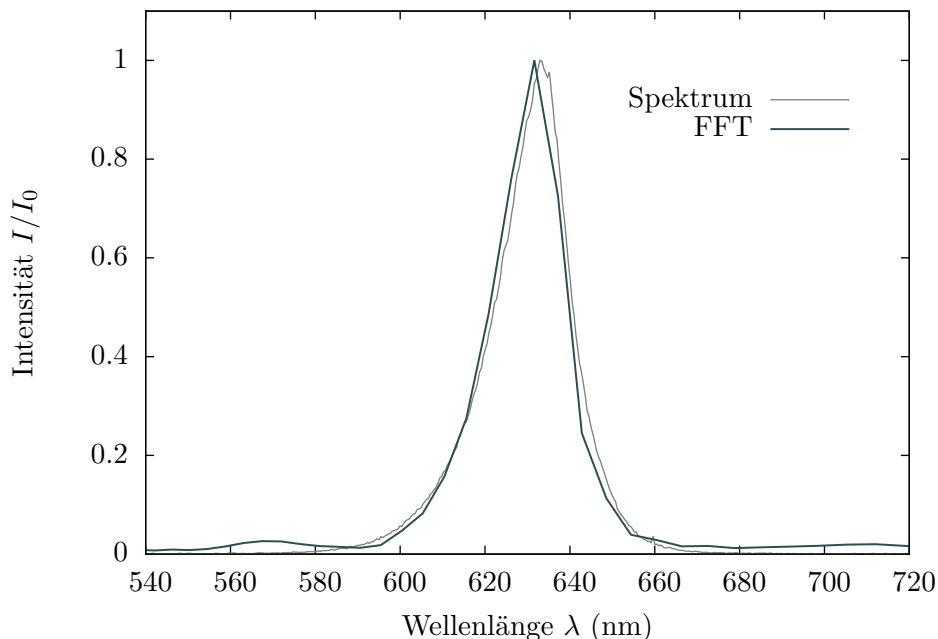


Abb. 44: Normierter Verlauf der FFT und des Spektrums der roten LED.

Der prinzipielle Kurvenverlauf der FFT kommt dem gemessenen Spektrum sehr nahe. Sogar die leichte Asymmetrie des Spektrums konnte mit der FFT aufgelöst werden. Der Vergleich der Halbwertsbreiten FWHM der beiden Spektren mit

$$\text{FWHM}_{\text{FFT}} = (19,0 \pm 0,5) \text{ nm}$$

$$\text{FWHM}_{\text{Spek}} = (18,5 \pm 0,2) \text{ nm}$$

zeigt, dass über das Interferogramm und der Fouriertransformation eine recht genaue Aussage über die spektrale Halbwertsbreite der Lichtquelle gemacht werden kann. Mit Hilfe von Gleichung (3.15) kann von der Kohärenzlänge Δl zudem direkt auf die spektrale Breite $\Delta\lambda$ geschlossen werden. Es gilt

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta l}. \quad (6.7)$$

Für die Halbwertsbreite ergibt sich daraus ein Wert von $\text{FWHM}_{\text{Intf}} = (21,2 \pm 0,1) \text{ nm}$.

Interferogramm und Spektrum der weißen LED

Nachdem das Interferogramm der roten LED untersucht wurde, soll nun das Emissionsspektrum der weißen LED mit Hilfe des Interferogramms bestimmt werden. Der Versuchsaufbau für die Messung kann dabei unverändert bleiben. In Abbildung 45 ist das Interferenzbild der weißen LED nahe der Weißlichtposition dargestellt.

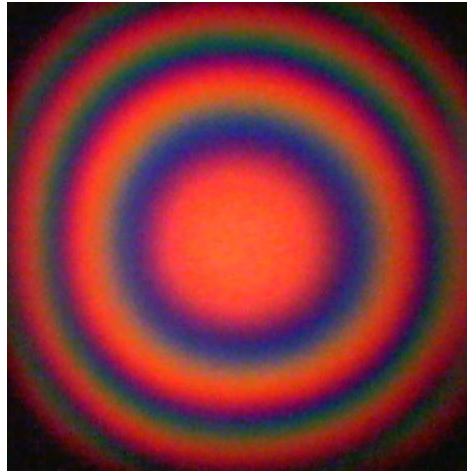


Abb. 45: Interferenzringe der weißen LED.

Man erkennt hier deutlich die spektrale Zerlegung der einzelnen Ringe und den dominierenden blauen ($\lambda \approx 454 \text{ nm}$) und rot-grünen ($550 - 600 \text{ nm}$) Anteil des Spektrums im Interferenzbild. Die Intensität ist im Gegensatz zur roten LED um den Faktor Zwei kleiner. Die Messung wurde in einem Intervall von 10 s und einem Messzeitabstand von 1 ms durchgeführt. In Abbildung 46 ist das gemessene Interferogramm der weißen LED dargestellt.

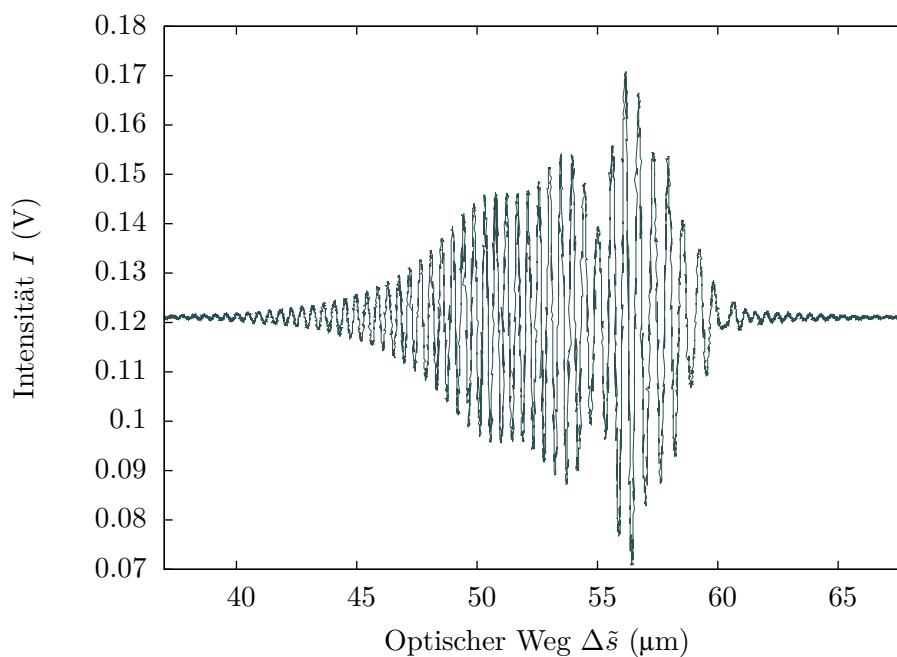


Abb. 46: Interferogramm einer weißen LED über die optische Wegstrecke $\Delta \bar{s}$. Der Piezo wurde im Regelbetrieb gefahren.

Der Verlauf des Interferogramms im Bereich zwischen $\Delta\tilde{s} = 40 - 55 \mu\text{m}$ gibt deutlich den Verlauf der Schulter des Spektrums der LED im Bereich $\lambda = 500 - 700 \text{ nm}$ aus Abbildung 36 wieder. Ebenso ist das Hauptmaximum des blauen Anteils des Spektrums deutlich zu erkennen. Besonders eindrucksvoll ist die wellenlängenabhängige Änderung der Periodendauer im Interferogramm. Um das Spektrum der LED zu erhalten, werden die Messdaten fouriertransformiert. Abbildung 47 zeigt die FFT des Interferogramms und das vom Spektrometer gemessene Spektrum der weißen LED. Die Werte wurden zur besseren Vergleichbarkeit normiert.

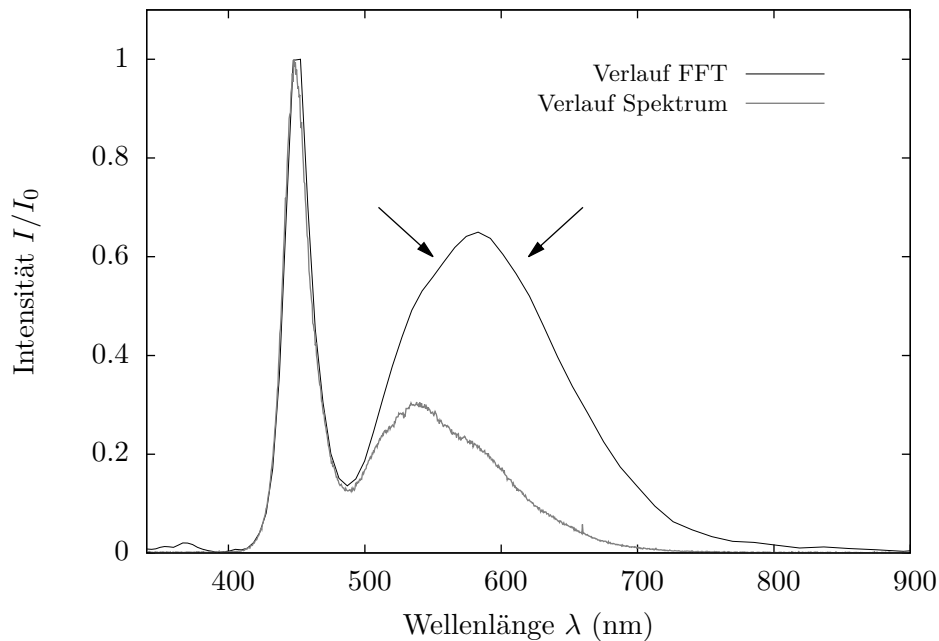


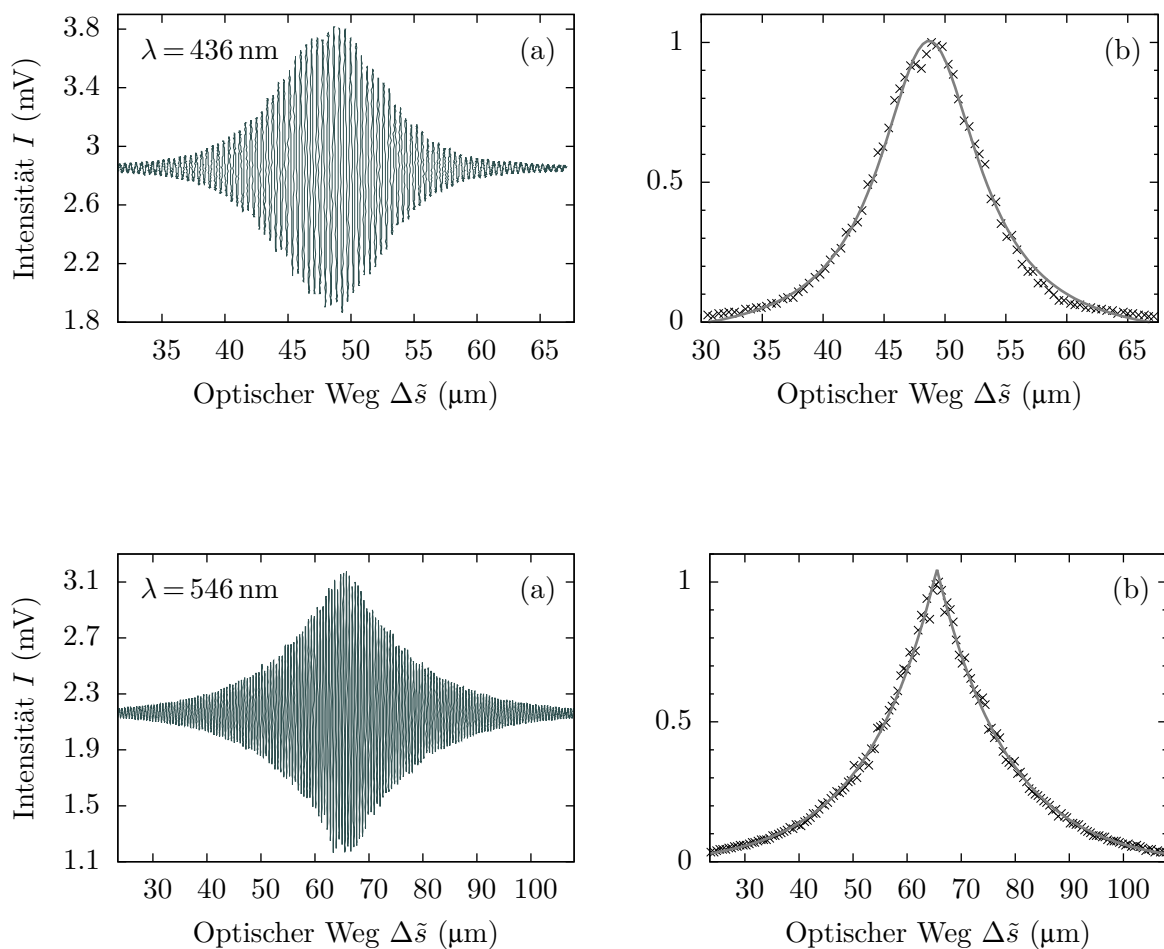
Abb. 47: FFT des Interferogramms und Spektrum der weißen LED.

Der Verlauf des Hauptmaximums im blauen Wellenlängenbereich ist nahezu identisch mit dem des gemessenen Spektrums. Auch die Schulter im Bereich von $500 - 700 \text{ nm}$ weist, bis auf die vergleichsweise hohe Intensität vom prinzipiellen Verlauf, keine Abweichungen auf. Der deutliche Unterschied in der Intensität ist zum einen auf die verhältnismäßig geringe Intensität des Interferogramms beim Hauptmaximum zurückzuführen, zum anderen besitzt die Si-Photodiode OPT301 im Bereich von $500 - 700 \text{ nm}$ eine doppelt so hohe Sensitivität als im blauen Bereich. Die Diskrepanz in der Intensität in diesem Wellenlängenbereich ist daher nachvollziehbar.

Interferogramme der Interferenzfilter

In einem nächsten Schritt sollen die Transmissionsspektren von drei verschiedenen Interferenzfiltern der Wellenlängen 436, 546 und 589 nm mittels der Interferogramme bestimmt werden. Als Lichtquelle dient eine spektral breite, weiße LED. Die Filter werden im Strahlengang jeweils vor der Photodiode positioniert. Eine Positionierung der Filter direkt nach der weißen LED war nicht möglich, da die bisherigen IF für den Mikrooptikaufbau deutlich zu groß sind. Die Position der IF hat jedoch keinen Einfluss auf die Messergebnisse.

Die Messung der Interferogramme erfolgt analog zu denen der weißen und roten LED. Da die Filter lediglich einen Transmissionsgrad von 21 % bis maximal 47 % aufweisen, wird aufgrund der niedrigen Intensität zusätzlich ein Mikrovoltverstärker (μV -Box 524040) verwendet, welcher in einem Bereich von 1 bis 100 mV das Signal der Photodiode OPT301 verstärken kann. In Abbildung 4 sind die gemessenen Interferogramme und die Einhüllenden der drei Filter in einer Übersicht dargestellt.⁴⁴



⁴⁴Die jeweiligen Graphen sowie die FFT der Interferogramme sind im Anhang S.97ff beigefügt.

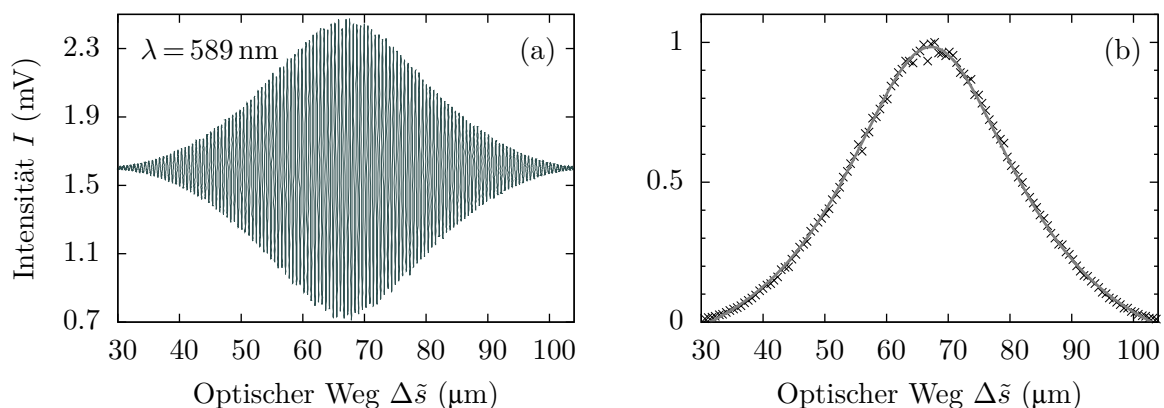


Abb. 48: Interferogramme (a) und deren normierte Einhüllenden (b) der drei Interferenzfilter mit $\lambda = 436$, 546 und 589 nm. Der Piezo wurde im geregelten Modus gefahren.

Im Gegensatz zum Interferogramm des Emissionsspektrums der weißen LED in Abbildung 46, zeigt sich in den Interferogrammen der Interferenzfilter, dass die Kohärenzlängen aufgrund der Einschränkung der spektralen Breite der Lichtquelle größer werden.

Der Verlauf der Interferogramme und die Form der Einhüllenden der einzelnen Interferogramme in Abbildung 48 sind bei jedem Filter charakteristisch. Während das Interferogramm des IF mit $\lambda = 546$ nm deutlich den exponentiellen Verlauf des Lorentzprofils aufweist, deutet sich beim IF mit $\lambda = 589$ nm ein verstärkt gaußförmiger Verlauf an. Ebenso charakteristisch ist der Doppelpeak im Interferogramm des IF mit $\lambda = 436$ nm. Die quantitative Analyse der Interferogramme, der FFTs sowie der charakteristischen Verläufe der Einhüllenden erfolgt in zwei Schritten.

Bestimmung der Schwerpunkswellenlängen

Mit Hilfe der Peakanalyse wurden in einem ersten Schritt die mittleren Wellenlängen λ_{Intf} über die Periode der Interferogramme nach Gleichung (6.4) ausgewertet. In Tabelle 4 sind diese und die über die FFT ermittelten Wellenlängen λ_{FFT} sowie die aus den gemessenen Spektren ermittelten Schwerpunkswellenlängen λ_{Spek} aufgelistet. Die Wellenlängen der roten LED wurden ebenfalls berücksichtigt. Die aus der FFT berechneten Spektren und die gemessenen Spektren sind im Anhang S.94f zusammen dargestellt.

Tabelle 4: Wellenlängen der roten LED und der Filter.

LED/I-Filter	λ_{Intf} (nm)	λ_{FFT} (nm)	λ_{Spek} (nm)
rote LED	$635,0 \pm 0,2$	$633,9 \pm 0,1$	$631,4 \pm 0,3$
IF $\lambda = 436$	$435,8 \pm 0,2$	$438,5 \pm 0,1$	$441,6 \pm 0,3$
IF $\lambda = 546$	$540,1 \pm 0,2$	$538,0 \pm 0,1$	$541,2 \pm 0,3$
IF $\lambda = 589$	$588,8 \pm 0,2$	$589,5 \pm 0,1$	$593,9 \pm 0,3$

Es zeigt sich, dass die aus den Interferogrammen und den FFTs ermittelten Wellenlängen relativ große Abweichungen zu den Ergebnissen der vermessenen Spektren zeigen. Eine besonders große Differenz ist beim Interferenzfilter mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ und 589 nm zu erkennen. Der Grund für diese Abweichungen soll im Folgenden diskutiert werden. In [Abbildung 49](#) ist der Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms der Messung mit dem IF mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ dargestellt. Das Interferogramm besitzt einen Doppelpeak bei $\Delta\tilde{s} \approx 47 \mu\text{m}$ bzw. bei $\Delta\tilde{s} \approx 49 \mu\text{m}$. Der Doppelpeak bzw. die Sattelstelle lässt sich ebenfalls im Transmissionsspektrum $I(\lambda)$ des Filters im [Anhang S.91](#), [Abbildung 63](#) wiederfinden.

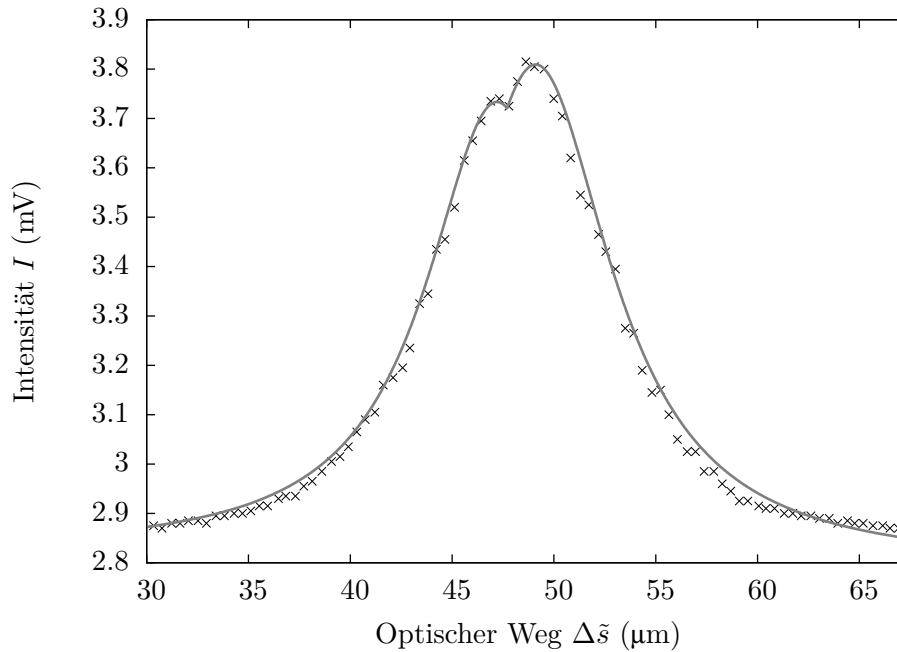


Abb. 49: Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms des Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus.

Der Grund für die Ausbildung eines Doppelpeaks und die Verschiebung der Schwerpunktswellenlänge im Transmissionsspektrum des IF liegt darin begründet, dass das Spektrum der als Strahlungsquelle verwendeten weißen LED⁴⁵ beim Transmissionsmaximum $\lambda = 436 \text{ nm}$ des IF eine stark abfallende Flanke aufweist. Diese Flanke verschiebt die Mittelpunktswellenlänge λ_{Filter} des IF zu höheren Wellenlängen und führt zu einer Asymmetrie des Transmissionsspektrums. Die linke Flanke ist nun deutlich steiler und das Maximum der Transmission liegt bei $\lambda \approx 440 \text{ nm}$. Der Wert beschreibt die Stelle, an welcher die Transmission des IF signifikant abzufallen beginnt.⁴⁶ In [Abbildung 50](#) ist die Wirkung des Spektrums der weißen LED auf das Transmissionsspektrum des Interferenzfilters noch einmal veranschaulicht.

⁴⁵Siehe im [Anhang S.90](#), [Abbildung 61](#)

⁴⁶Siehe dazu das Transmissionsspektrum $T(\lambda)$ im [Anhang S.93](#), [Abbildung 66](#)

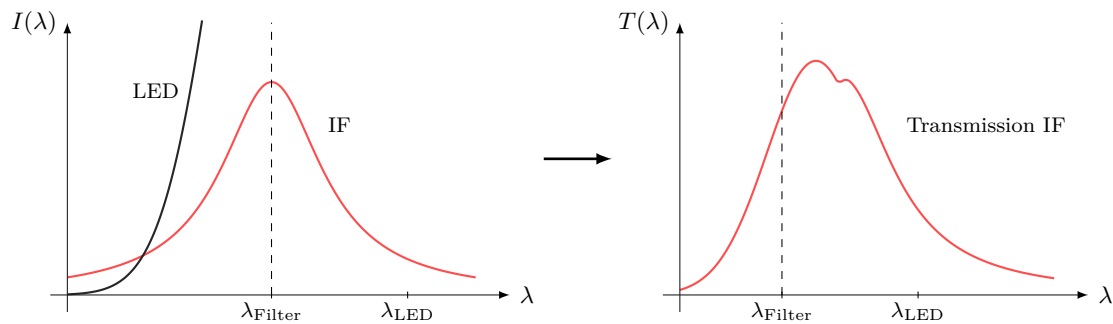


Abb. 50: Wirkung des Emissionsspektrums der weißen LED auf das Transmissionsspektrum $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda_{\text{Filter}} \approx 436$ nm. Das Emissionsmaximum des Blauanteils der weißen LED liegt bei $\lambda_{\text{LED}} \approx 448$ nm.

Der Nebenpeak im Interferogramm bei $\lambda \approx 442$ nm resultiert aus der Sattelstelle im Spektrum der weißen LED.⁴⁷ Eine ähnliche Asymmetrie zeigt sich auch beim Transmissionsspektrum des IF mit $\lambda = 589$ nm.⁴⁸ Das Spektrum zeigt nahe des Maximums eine deformierte rechte Flanke. Da die Intensität des Spektrums der weißen LED in diesem Wellenlängenbereich deutlich kleiner ist und der Transmissionsgrad des IF bei $T \approx 43$ % liegt, sind die Auswirkungen auf das Spektrum des Filters deutlich geringer als beim IF mit $\lambda = 436$ nm. Dennoch ist auch hier die Schwerpunktswellenlänge des Spektrums im Vergleich zu den aus dem Interferogramm bestimmten Werten um $\Delta\lambda \approx 5$ nm verschoben.

Halbwertsbreiten und Kohärenzlängen der Lichtquellen

In einem zweiten Schritt werden die Kohärenzlängen direkt aus den Interferogrammen bzw. deren Einhüllenden bestimmt und mit denen aus der FFT berechneten Spektren sowie den Halbwertsbreiten der gemessenen Spektren verglichen. Die Kohärenzlängen können direkt aus den angefitteten Verläufen der normierten Einhüllenden bestimmt werden. Für den Filter mit $\lambda = 546$ nm entspricht der Verlauf der Einhüllenden der in der Theorie hergeleiteten Kontrastfunktion $\hat{\gamma}_L(\Delta\tilde{s})$ aus Gleichung (3.79) in Kapitel 3.6, sodass hier die Kohärenzlänge direkt aus den Fitparametern abgelesen werden kann. Die Einhüllenden der anderen beiden Filter weisen einen verstärkt gaußförmigen Anteil auf, wobei insbesondere der Verlauf der Einhüllenden des IF mit $\lambda = 589$ nm einen nahezu gaußförmigen Verlauf vermuten lässt. Die beste Anpassung der Messwerte konnte dennoch über ein Lorentzprofil gemäß Gleichung (6.5) realisiert werden, aus dessen Verläufen anschließend die 1/e-Kohärenzlänge bestimmt werden kann. In Tabelle 5 sind die Kohärenzlängen Δl , die daraus berechneten spektralen Halbwertsbreiten $\text{FWHM}_{\text{Intf}}$ gemäß Gleichung (6.7) sowie die Halbwertsbreiten der gemessenen Spektren und die über die FFT berechneten Spektren für die IF und der roten LED zusammengefasst.

⁴⁷Siehe im Anhang S.91, Abbildung 62

⁴⁸Siehe im Anhang S.94, Abbildung 68

Tabelle 5: Kohärenzlängen Δl der Kontrastfunktionen der Filter und die berechneten spektralen Breiten $\text{FWHM}_{\text{Intf}}$ sowie die gemessenen Halbwertsbreiten der FFT und der gemessenen Spektren.

LED/I-Filter	Δl (μm)	$\text{FWHM}_{\text{Intf}}$ (nm)	FWHM_{FFT} (nm)	$\text{FWHM}_{\text{Spek}}$ (nm)
rote LED	$19,0 \pm 0,1$	$21,2 \pm 0,1$	$19,0 \pm 0,5$	$18,5 \pm 0,2$
IF $\lambda = 436$	$11,9 \pm 0,2$	$16,0 \pm 0,3$	$15,9 \pm 0,5$	$14,1 \pm 0,2$
IF $\lambda = 546$	$26,3 \pm 0,4$	$11,1 \pm 0,2$	$10,5 \pm 0,5$	$7,9 \pm 0,2$
IF $\lambda = 589$	$35,9 \pm 0,3$	$9,7 \pm 0,1$	$11,1 \pm 0,5$	$10,0 \pm 0,2$

Die berechneten und gemessenen Halbwertsbreiten FWHM in Tabelle 5 liegen in der selben Größenordnung. Es ist also prinzipiell möglich über die Einhüllende der Interferogramme eine quantitative Aussage über die Kohärenzlänge und die spektrale Breite der Lichtquelle zu machen ohne bereits den Verlauf des tatsächlichen Spektrums zu kennen. Umgekehrt sollen nun die Kohärenzlängen der Interferogramme und die berechneten Kohärenzlängen aus den Halbwertsbreiten der aufgenommenen Spektren bestimmt und verglichen werden. Dies ist insofern interessant, da die Schwerpunktswellenlängen der Interferogramme und die der Spektren verschieden sind. In Tabelle 6 sind die Kohärenzlängen aufgelistet.

Tabelle 6: Kohärenzlängen Δl aus den Interferogrammen (Intf) und Spektren (Spek) der roten LED und der Interferenzfilter.

LED/I-Filter	Kohärenzlänge Δl_{Intf} (μm)	Kohärenzlänge Δl_{Spek} (μm)
rote LED	$19,0 \pm 0,1$	$21,6 \pm 0,3$
IF $\lambda = 436$	$11,9 \pm 0,2$	$13,8 \pm 0,2$
IF $\lambda = 546$	$26,3 \pm 0,4$	$37,1 \pm 0,9$
IF $\lambda = 589$	$35,9 \pm 0,3$	$35,3 \pm 0,8$

Auch hier liegen die Werte in der selben Größenordnung. Lediglich die Kohärenzlänge des IF mit $\lambda = 546$ nm weicht signifikant ab.

Insgesamt zeigen die Messungen zu den Interferogrammen des Emissionsspektrums der roten LED und der Transmissionsspektren der Interferenzfilter, dass die charakteristischen Merkmale der Lichtquellen relativ genau mit dem Michelson-Interferometer messbar sind. Insbesondere der Verlauf des Interferogramms des IF mit 436 nm macht den Einfluss des Emissionsspektrums auf das Transmissionsspektrum der IF deutlich. Neben dem diskutierten Doppelpeak hätten vermutlich noch weitere Einflüsse des Emissionsspektrums der LED analysiert werden können. Der unsaubere Verlauf der Einhüllenden deutet darauf hin. Ähnliche Merkmale sind auch beim Interferogramm des Transmissionsspektrums des Filters mit 546 nm in abgeschwächter Form zu beobachten.

6.5 Doppellinie der Natriumdampfampe

Die Natriumdampfampe besitzt eine Doppellinie mit $\lambda_1 = 588,995$ und $\lambda_2 = 589,592$ nm. Die Linien haben einen Abstand von $\Delta\lambda = 0,597$ nm und erzeugen im Interferogramm des Michelson-Interferometers eine Schwebung. Das Interferometer ist in der Lage die resultierende Schwebungswellenlänge aufzulösen und damit den Abstand der Na-D-Linien zu bestimmen. Nach Gleichung (3.18) beträgt die Schwebungswellenlänge

$$\lambda_s = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 581,686 \mu\text{m}$$

Da der Piezoversteller lediglich eine maximale optische Wegstrecke von $\Delta\tilde{s} = 2\Delta s = 160 \mu\text{m}$ durchfahren kann, kann mit dem vorliegenden Aufbau die Schwebung nicht über die Messung eines Interferogramms erfolgen. Es wird daher der Spiegel manuell über die Mikrometerschraube verstellt und ein Bereich von $\Delta s \approx 5$ mm nach der Weißlichtposition durchfahren. Die Schwebung der Na-D-Linie erzeugt im Interferogramm Schwebungspunkte mit geringem und hohem Kontrast. Trifft ein Interferenzmaximum der einen Linie mit einem Minimum der benachbarten Linie zusammen, wird der Kontrast des Interferenzbildes minimal und im umgekehrten Fall maximal. Die Punkte werden im Folgenden als destruktive und konstruktive Schwebungspunkte bezeichnet. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Schwebungspunkte entspricht der Schwebungswellenlänge λ_s . In Abbildung 51 sind ein Schwebungspunkt mit hohem Kontrast und ein darauffolgender Schwebungspunkt mit niedrigem Kontrast dargestellt.

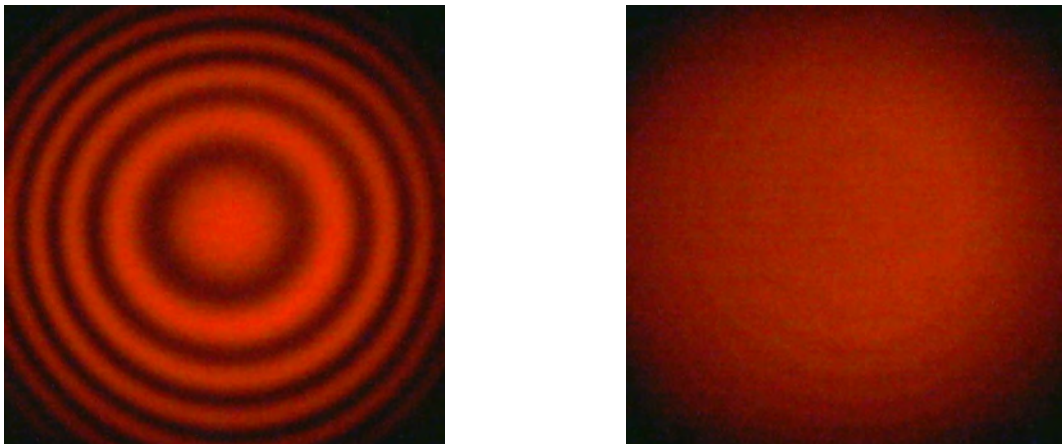


Abb. 51: Konstruktiver Schwebungspunkt mit hohem Kontrast (links) und ein benachbarter destruktiver Schwebungspunkt mit niedrigem Kontrast (rechts).

Für das Auge ist ein kontrastarmes Interferenzbild besser zu erkennen, sodass bei der Messung der Abstand der destruktiven Schwebungspunkte vermessen wurde. Neben der Na-D-Linie existieren noch weitere Übergänge, welche im Spektrum der Na-Dampfampe in Abbildung 52 zu erkennen sind. Einige dieser Linien erzeugen zusätzliche Schwebungen, welche die Lokalisierung der destruktiven Schwebungspunkte der Na-D-Linie erschweren. Das Problem kann umgangen werden, indem zusätzlich ein Interferenzfilter mit 589 nm und einer Halbwertsbreite von ca. 10 nm verwendet wird, der ausschließlich die Na-D-Linie transmittiert.

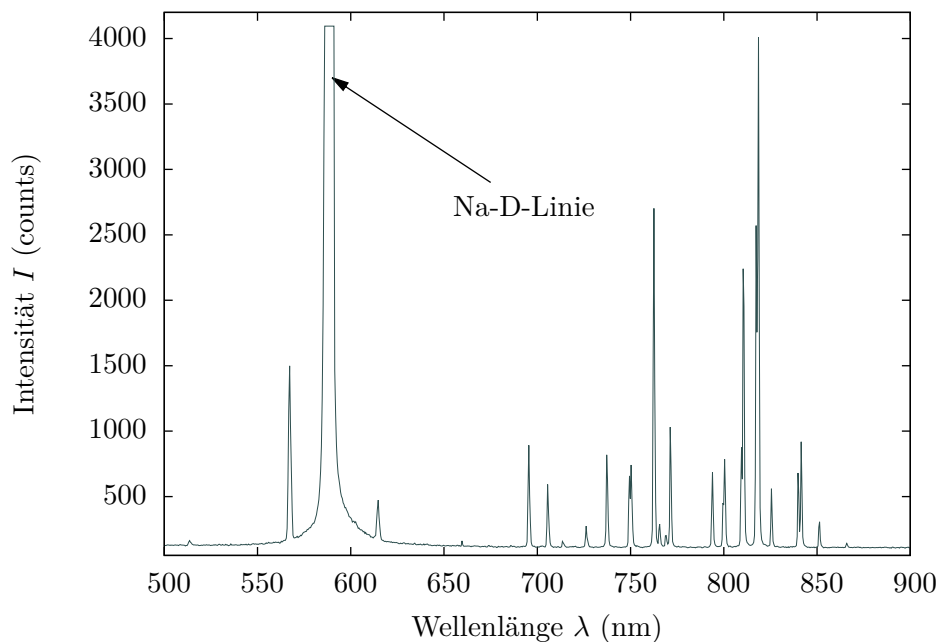


Abb. 52: Spektrum der Na-Dampfampe bei einer hohen eingestrahnten Intensität. Die Intensität der Na-D-Linie ist bewusst übersteuert, um weitere Übergänge sichtbar zu machen. Mit dem verwendeten Spektrometer HR2000 ist die Na-D-Linie nicht zu trennen.

Es wurden insgesamt $n = 11$ destruktive Schwebungspunkte in einem Intervall von $\Delta s = (2,907 \pm 0,005)$ mm aufgenommen. Bei Schwebungspunkten höheren Gangunterschieds wird der Kontrast so schlecht, dass die Messung mit einem zu großen Fehler behaftet sein würde. Berücksichtigt man den Zusammenhang zwischen Verschiebung und optischer Wegstrecke $\Delta \tilde{s} = 2\Delta s$, gilt für die Schwebungswellenlänge

$$\lambda_s = \frac{2\Delta s}{n-1}, \quad (6.8)$$

mit der Anzahl n der im Intervall $\Delta \tilde{s}$ gemessenen Schwebungspunkte. Für die Schwebungswellenlänge ergibt sich somit ein Wert von $\lambda_s = (0,5814 \pm 0,009)$ mm. Im Vergleich zum theoretisch berechneten Wert $\lambda_{\text{theo}} = 0,58169$ mm ergibt sich eine Abweichung von $\sim 0,0003$ mm, dies entspricht einer relativen Abweichung von 0,05 %. Mit Hilfe der Umformung von Gleichung (3.18) nach λ_2 mit

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_s \lambda_1}{\lambda_s - \lambda_1} \quad (6.9)$$

und der Voraussetzung, dass $\lambda_1 = 588,995$ nm bekannt ist, kann die zweite Wellenlänge λ_2 aus der Schwebungswellenlänge der Na-D-Linie berechnet werden. Es ergibt sich ein sehr genauer Wert von

$$\lambda_2 = (589,59 \pm 0,01) \text{ nm}.$$

Bei Messungen ohne einen entsprechenden Interferenzfilter ergibt sich für die gemessene Schwebungswellenlänge dagegen eine Abweichung von 0,2 % zum Literaturwert und damit

ein um den Faktor drei größerer Fehler bei der berechneten Wellenlänge λ_2 . Bei zukünftigen Messungen ist es daher sinnvoll einen Interferenzfilter zu verwenden. Bisher wurde dieser Filter provisorisch in den Strahlengang positioniert. Für Messungen im Rahmen des Fortgeschrittenpraktikums empfiehlt es sich daher eine passende Halterung zu fertigen und ggf. einen kleineren Interferenzfilter zu kaufen. Zusätzlich wäre es vorteilhaft unter dem Piezoversteller auch einen motorgesteuerten Linear-Verschiebetisch zu installieren, welcher ebenso wie der Messschraubenvorsatz des Piezoverstellers auf einer Wegstrecke von mindestens $\Delta s \approx 2,5$ cm genau positioniert werden kann.

6.6 Moden des grünen Lasers

Im vorherigen Abschnitt konnte mit dem Michelson-Interferometer die Schwebungswellenlänge der Na-D-Doppellinie mit einer Abweichung von lediglich 0,05 % vermessen werden. Der Frequenzabstand der Na-D-Linie beträgt $\Delta\nu_{\text{Na}} \approx 516$ GHz, sodass ein Verschiebeweg der Spiegel in der Größenordnung von $\sim 0,3$ mm notwendig war, um die erste Schwebungswellenlänge zu messen. Je kleiner die zu vermessene Schwebungsfrequenz ist, desto größer ist der notwendige Gangunterschied Δs der Spiegel, um die Schwebungswellenlänge zu vermessen. Das Interferometer müsste demnach auch in der Lage sein deutlich niedrigere Frequenzabstände zu messen. In einem ersten Schritt sollen daher die Axial-Moden eines grünen Halbleiterlasers (LFD532-1) mit einer Wellenlänge von $\lambda = 532$ nm und einer Leistung von 1 mW untersucht werden.⁴⁹ Das aktive Medium des Lasers besteht aus einem YVO_4 -Kristall (Yttrium-Vanadat), welcher über eine LED optisch gepumpt wird und Strahlung der Wellenlänge 1064 nm emittiert. Ein dahinter befindlicher frequenzverdoppelnder KTP-Kristall (Kaliumtitanylphosphat) erzeugt schließlich Laserlicht der Wellenlänge 532 nm. Im Gegensatz zur Natriumdampfampe mit nur einer Doppellinie, können im Laserverstärkungsprofil in Abhängigkeit von der Laserresonatorlänge mehrere Moden mit äquidistanten Abstand $\Delta\nu_{\text{FSR}}$ auftreten. In Abbildung 53 sind diese Schwebungsmoden im gaußförmigen Verstärkungsprofil $G(\nu)$ eines Lasers prinzipiell dargestellt. Es können nur solche Moden im Resonator anschwingen, deren Verstärkungsfaktor oberhalb der Verlustlinie (Laserschwelle) liegt.⁵⁰

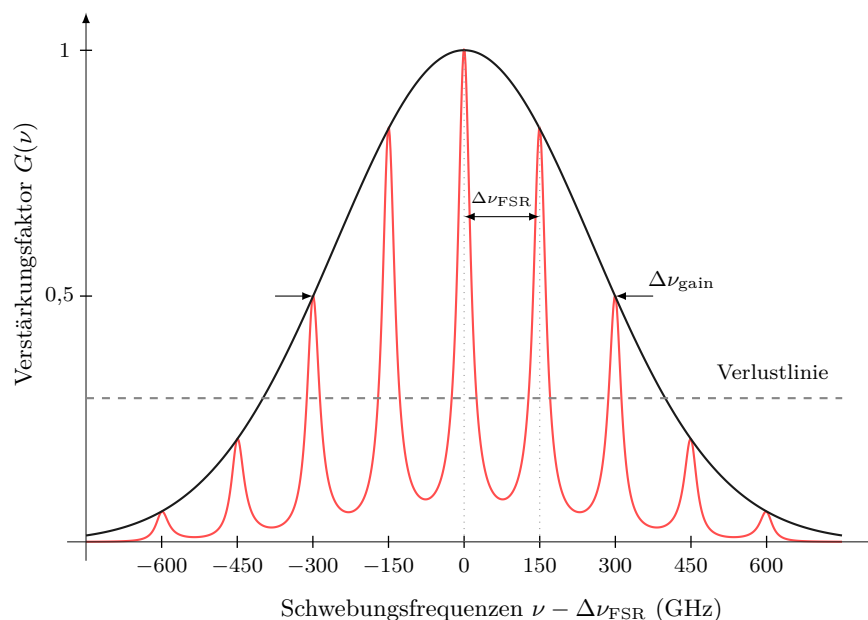


Abb. 53: Verstärkungsprofil $G(\nu)$ einer Laserlinie mit einer Halbwertsbreite $\Delta\nu_{\text{gain}}$ sowie die möglichen longitudinalen Resonatormoden, hier mit Frequenzabstand $\Delta\nu_{\text{FSR}} = 150$ GHz.

Für den *freien Spektralbereich* der im Laserresonator möglichen Axial-Moden gilt der Zusammenhang

⁴⁹vgl.: Datenblatt [26] auf der Homepage www.laserfuchs.de

⁵⁰vgl.: J. Kehlbeck (2012) [10], S.10ff

$$\Delta\nu_{\text{FSR}} \equiv \Delta\nu = \frac{c}{2nL}, \quad (6.10)$$

wobei n der Brechungsindex des YVO₄-Kristalls ist und L die Länge des Resonators beschreibt. Der Brechungsindex wird über den Brechungsindex des YVO₄-Kristalls mit $n \approx 2$ abgeschätzt.⁵¹

Das Messverfahren zur Bestimmung der Schwebungswellenlänge ist analog zum vorherigen Kapitel. Es wurden insgesamt $n_s = 18$ destruktive Schwebungspunkte in einem Intervall von $\Delta s \approx 8,5$ mm aufgenommen. Bei der Messung konnten allerdings zwei Schwebungen unterschiedlichen Kontrastes beobachtet werden. Da das Interferogramm der Schwebung aufgrund der großen Wegdifferenz nicht direkt aufgenommen werden konnte, ist in Abbildung 54 der Verlauf des beobachteten Kontrastes $K(\Delta s)$ skizziert.

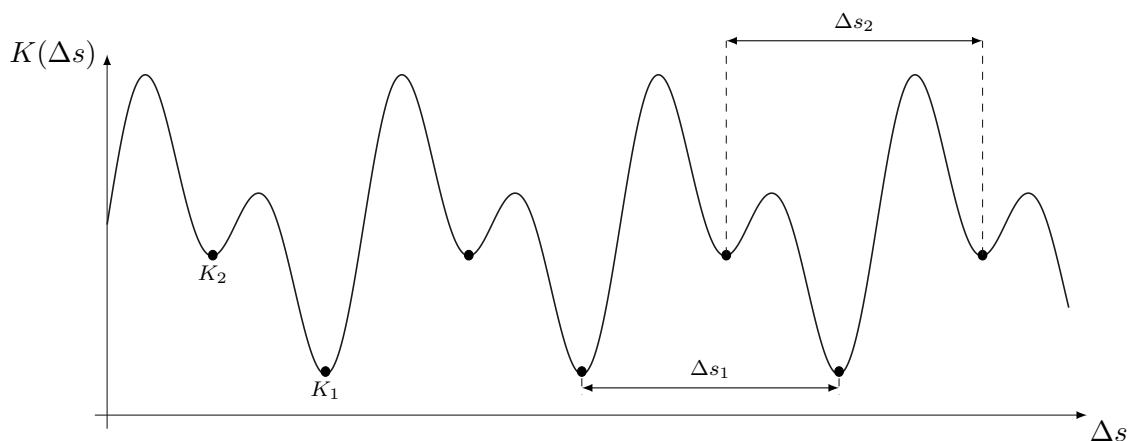


Abb. 54: Skizze des beobachteten Kontrastverlaufs $K(\Delta s)$ der Schwebungen im Interferogramm des grünen Halbleiterlasers. K_1 und K_2 bezeichnen die gemessenen destruktiven Schwebungspunkte.

Die Schwebungspunkte minimalen Kontrastes werden im Folgenden mit K_1 , die Punkte mit etwas höherem Kontrast mit K_2 bezeichnet. Für den Abstand Δs_1 der Schwebungspunkte K_1 wurde ein Wert von

$$\Delta s_1 = (0,998 \pm 0,018) \text{ mm}$$

gemessen. Für den Abstand Δs_2 der Punkte K_2 ergibt sich ein Wert von $\Delta s_2 = (1,001 \pm 0,023) \text{ mm}$. Die Werte sind nahezu gleich und können daher im Rahmen der Messungenauigkeiten auf $\Delta s_1 = \Delta s_2 \approx (1 \pm 0,02) \text{ mm}$ abgeschätzt werden. Mit Hilfe des Zusammenhangs für die optische Wegdifferenz $\Delta \tilde{s} = 2\Delta s$, ergibt sich für die Schwebungswellenlänge λ_s ein Wert von $\lambda_s = (2 \pm 0,04) \text{ mm}$ und damit ein freier Spektralbereich (FSR) von

$$\Delta\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{\lambda_s} \approx (150 \pm 3) \text{ GHz}. \quad (6.11)$$

⁵¹Angaben zu den Brechungsindizes der YVO₄- und KTP-Kristalle sind über die Sellmeier-Gleichungen $n(\lambda)$ auf der Homepage <http://www.redoptronics.com> beschrieben.

Modenabstände dieser Größenordnung sind nur noch von sehr guten Spektrometern auflösbar. Im Vorfeld wurde der Laser mit einer schnellen Photodiode und einem Spektrumanalysator (Advantest R3272 Spectrum Analyzer) auf Schwebungsfrequenzen der longitudinalen Moden untersucht. Diese konnten jedoch aufgrund der maximal messbaren Frequenz von 27,5 GHz nicht mehr aufgelöst werden. Aus dem gemessenen Spektralbereich $\Delta\nu_{\text{FSR}}$ und Gleichung (6.10) kann in einem weiteren Schritt auf die Länge L des Resonators geschlossen werden. Es gilt

$$\Delta\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2nL} = \frac{c}{\lambda_s} = \frac{c}{2\Delta s} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{\Delta s}{n}. \quad (6.12)$$

Für den verwendeten Laser LFD 532-1 mit einem Brechungsindex von $n \approx 2$ ergibt sich somit eine Resonatorlänge von

$$L = (500 \pm 10) \mu\text{m}.$$

Dieser Wert liegt für einen Halbleiterlaser in einer realistischen Größenordnung. Nach Gleichung (3.14) entspricht der freie Spektralbereich in Gleichung (6.11) einer Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_{\text{Mode}} = c \frac{\Delta\nu}{\nu^2} = (0,14 \pm 0,01) \text{ nm} \quad (6.13)$$

im Spektrum des Lasers. Es soll nun mit Hilfe eines hochauflösenden Gitterspektrometers (Auflösung bis zu $0,25 \text{ \AA}$ bei einer Spaltbreite von $10 \mu\text{m}$) der Modenabstand aus Gleichung (6.13) experimentell überprüft werden.⁵² In Abbildung 55 ist das gemessene Verstärkungsprofil der grünen Laserline dargestellt.

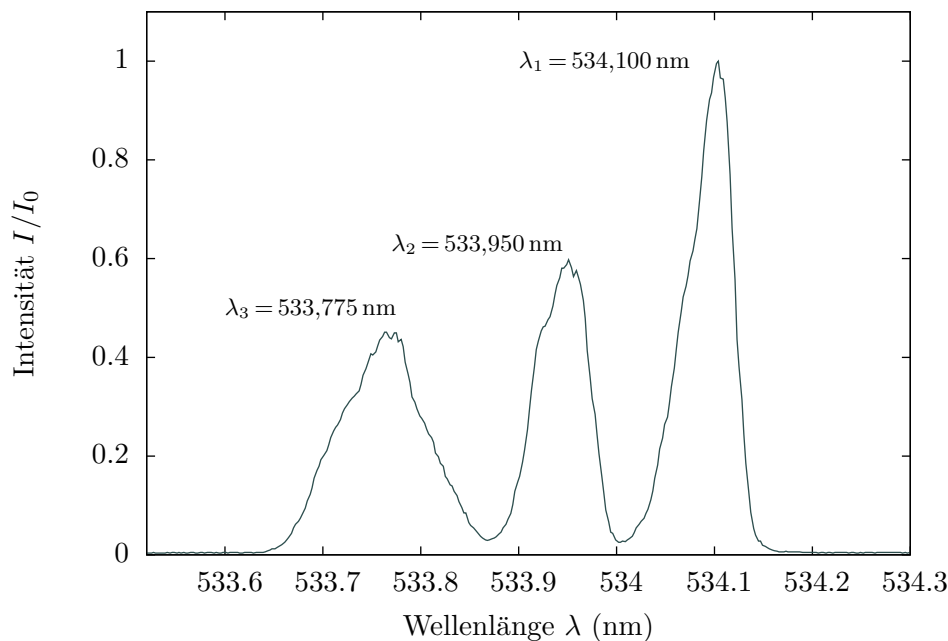


Abb. 55: Hochaufgelöste 532-nm-Linie des grünen Halbleiterlasers (LFD532-1). Die absolute Lage der Wellenlängenskala ist leicht verschoben.

⁵²vgl.: J. Eggemann (2012) [5], Kapitel 2.2

Der Verlauf zeigt deutlich drei Moden im Laserprofil, welche an der linken Flanke eine Sattelstelle im Profil aufweisen. Auffallend ist, dass die Mode höchster Intensität, anders als erwartet, nicht im Zentrum der Laserlinie liegt, sondern die Intensität der Moden von links nach rechts zunimmt. Der Abstand der Moden beträgt

$$\Delta\lambda_{1,2} = (0,150 \pm 0,025) \text{ nm}$$

$$\Delta\lambda_{2,3} = (0,175 \pm 0,025) \text{ nm}$$

Beide Werte liegen in der Größenordnung der gemessenen Wellenlängendifferenz aus Gleichung (6.13) und stimmen im Rahmen der Messungenauigkeiten des Spektrometers und der Messung über die Schwebungspunkte mit dem Michelson-Interferometer überein, wobei der Modenabstand $\lambda_{1,2}$ eine deutlich geringere Abweichung besitzt. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Moden der Wellenlängen λ_1 und λ_2 aufgrund ihrer, im Vergleich zur Mode der Wellenlänge λ_3 , höheren Intensität den größten Anteil an der beobachteten Schwebung ausmachen. Folglich ist es möglich mit dem Michelson-Interferometer Modenabstände von z. B. Lasermoden zu bestimmen, welche mit herkömmlichen Spektrometern kaum auflösbar sind. Bei enger liegenden Modenabständen im MHz-Bereich, am Beispiel eines He-Ne-Lasers, wird der Verschiebeweg der Spiegel im Michelson-Interferometer entsprechend größer.⁵³

Im Rahmen eines Versuches für das Fortgeschrittenenpraktikum wäre es ebenso wie in Kapitel 6.5 bereits beschrieben vorteilhaft die Messung des Interferogramms unter Verwendung eines motorgesteuerten Linear-Verschiebetisches durchzuführen.

Das Laserprofil zeigt bei einer Aufweitung des Strahls unter Verwendung einer Linse eine radialsymmetrische Ringstruktur auf. Die Anzahl der Ringe, die beobachtet werden konnte, hängt vom Abstand zwischen Linse und Laser ab. In Abbildung 56 ist eines dieser beobachteten Ringmuster abgebildet.

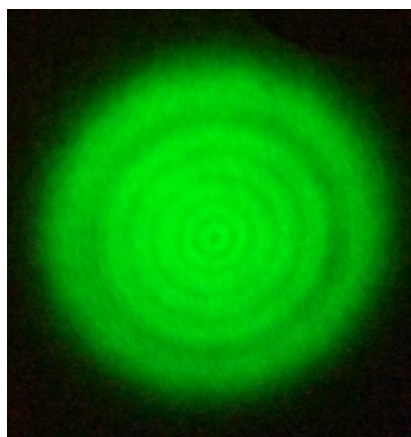


Abb. 56: Beobachtete Ringstruktur des Laserprofils des grünen Lasers LFD532-1. Die Laserlinie wurde mit einer Linse aufgeweitet.

⁵³Bei einem He-Ne-Laser mit einer Resonatorlänge von 60 cm ergäbe sich ein Modenabstand von 500 MHz und damit ein Verschiebeweg der Spiegel von $\Delta s = 30 \text{ cm}$

Bei den Ringen handelt es sich vermutlich um transversale Moden, sog. Gauss-Laguerre-Moden $\text{TEM}_{p,l}$, welche sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung im Resonator ausbilden. Aufgrund des zylindrischen Querschnitts des Halbleiterresonators sind diese Moden radialsymmetrisch. Für $p \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0$ beschreiben die Intensitätsverteilungen der Moden konzentrische Ringe, die mit höherer Ordnung von p in ihrer Anzahl zunehmen. In Abbildung 57 sind die Intensitätsverteilungen bis zur Ordnung $p = 2$ dargestellt.

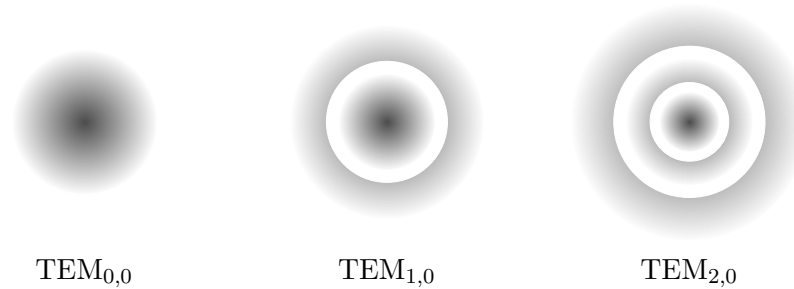


Abb. 57: Drei verschiedene Intensitätsverteilungen der Gauß-Laguerre-Moden $\text{TEM}_{p,l}$.

Für die Schwebungsfrequenzen der Moden gilt der Zusammenhang

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \left(\Delta q + \frac{\arccos(\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} (2\Delta p + \Delta l) \right), \quad (6.14)$$

wobei g_1 und g_2 die Spiegelparameter $g_i = L/R_i$ und Δq die Ordnung der jeweiligen Mode beschreiben.⁵⁴ Für den Fall eines Resonators mit planparallelen Spiegeln wird das Argument des Arkuskosinus Null und der von den Ordnungen m und n abhängige Term spielt für die Frequenzen der Schwebungen keine Rolle mehr. Die Schwebungsfrequenzen der Moden sind damit allein durch den freien Spektralbereich $\Delta\nu_{\text{FSR}}$ festgelegt und können daher im Kontrastverlauf $K(\Delta s)$ nicht als zusätzliche Schwebungspunkte gemessen werden.

⁵⁴vgl.: W. Kleen, R. Müller (1969) [13], S.61

6.7 Brechungsindex einer Glasplatte

In Kapitel 3.8 wurde auf die Theorie zur Bestimmung der Brechungsindizes transparenter Medien mit dem Michelson-Interferometer eingegangen. Für den Brechungsindex n gilt demnach der Zusammenhang

$$n = \frac{(2d - N\lambda)(\cos(\alpha) - 1)}{2d(\cos(\alpha) - 1) + N\lambda} \quad (6.15)$$

mit der Dicke d des Mediums, dem Drehwinkel α der Rotation in der x,y -Ebene und der Anzahl der beim Verstellen des Winkels durchlaufenden Ringe N im Interferenzbild. Für die Messung wird das Michelson-Interferometer mit einer Armlänge von mindestens 20 cm aufgebaut und die Glasplatte mit der Halterung in einen der Interferometerarme gestellt. Die Glasplatte wird anschließend mit der planparallelen Grenzfläche orthogonal zum einfallenden Laserstrahl justiert. Für die Justage kann sowohl die Linse zum Aufweiten des Laserstrahls, als auch die Linse zur Vergrößerung des Interferenzbildes aus dem Strahlengang entfernt werden. Dies hat den Vorteil, dass so die Reflexionen der Glasplatte am Schirm sichtbar werden. Ist die Glasplatte optimal justiert, so liegen sämtliche Reflexionen in einem Punkt am Beobachtungsschirm. Um eine möglichst genaue Messung mit den vorhandenen Materialien zu realisieren, wurde die Mikrometerschraube mit Hilfe eines in der Drehgeschwindigkeit präzise einstellbaren Elektromotors gedreht und die Durchgänge N im Interferenzbild mit einer Photodiode über das gemessene Interferogramm gezählt. Für die Übersetzung zwischen Motor und Mikrometerschraube wurde ein Faden um die Schraube gewickelt und mit der Welle des Motors verbunden.

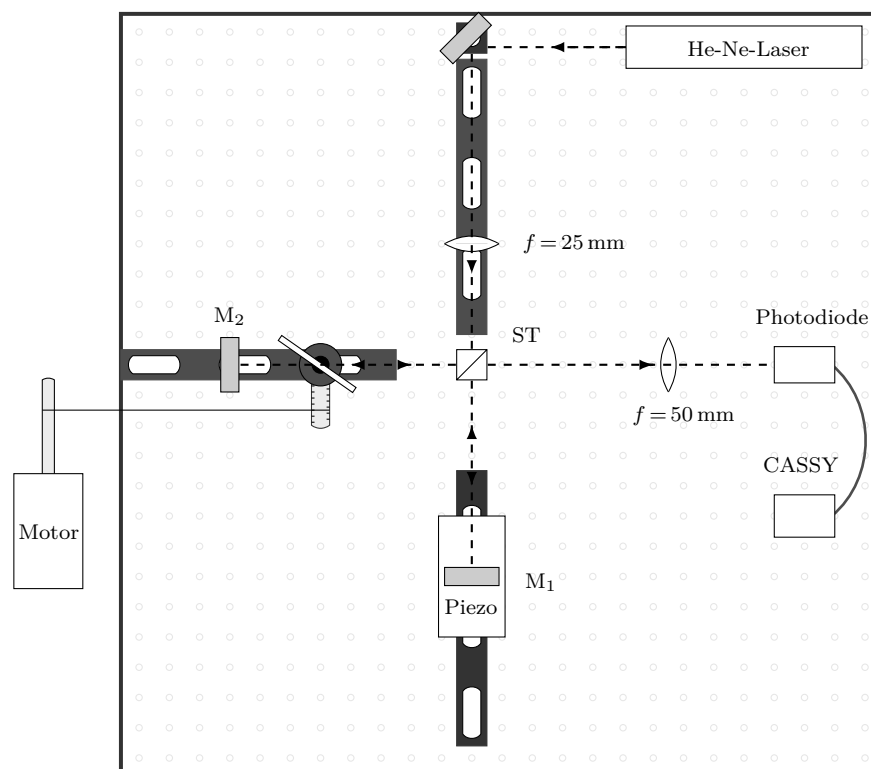


Abb. 58: Versuchsaufbau zur Messung der Brechzahl einer Glasplatte.

Auswertung der Ergebnisse

Für die Messung wurde eine Glasplatte der Dicke $d = (2,50 \pm 0,05)$ mm mit unbekanntem Brechungsindex verwendet, welche auf einer verstellbaren Halterung provisorisch mit doppelseitigem Klebeband befestigt wurde.⁵⁵ Unter Verwendung des beschriebenen Elektromotors konnte die Mikrometerschraube mit einer Frequenz von $\nu = 20 \text{ min}^{-1}$ um max. 6 mm gedreht werden, was einer Drehung der Glasplatte um $\alpha \approx 19^\circ$ entspricht.⁵⁶ Um die Nullposition $\alpha = 0^\circ$ möglichst genau bestimmen zu können, wurde die Glasplatte mit einem Anfangswinkel von $\alpha \approx -3,2^\circ$ eingestellt und die Platte mit konstanter Drehgeschwindigkeit bis zur maximal möglichen Auslenkung gedreht. In Abbildung 59 ist der resultierende Intensitätsverlauf dargestellt.

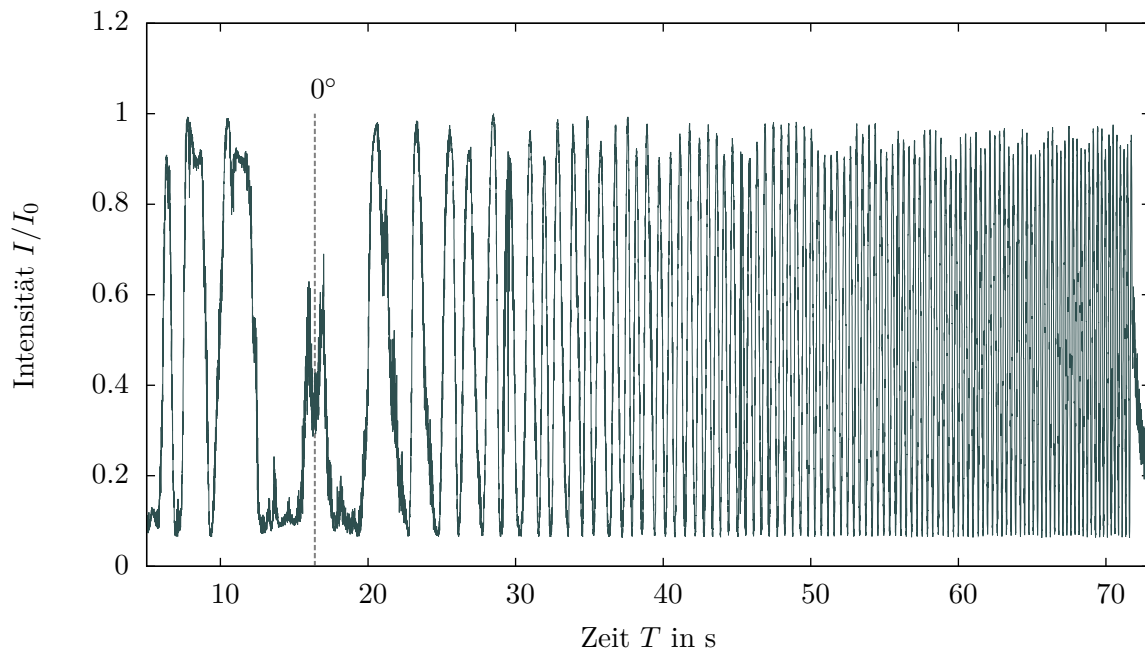


Abb. 59: Intensitätsverlauf für eine um $15,52^\circ$ gedrehte Glasplatte mit einer Dicke von $d = 2,5$ mm. Es konnten 101 konstruktive Durchgänge nach der Nullposition gezählt werden.

Die Nullposition ist aufgrund der Symmetrie deutlich zu erkennen. Bei der in Abbildung 59 durchgeführten Messung konnten insgesamt 101 konstruktive Durchgänge bei einem Drehwinkel von $\alpha = 15,52^\circ$ gezählt werden. Für den Winkel wurde ein Fehler von $\Delta\alpha = \pm 0,32^\circ$ abgeschätzt. Für den Brechungsindex ergibt sich nach Gleichung (6.15) ein Wert von $n = 1,52 \pm 0,05$. Angesichts der Ungenauigkeiten bei der Angabe des Winkels und der Dicke der Glasplatte, kann der Wert bei einer einzigen Messung nicht genauer bestimmt werden. Die Messung wurde daher zehn mal wiederholt und der Mittelwert bestimmt. Es ergibt sich damit abschließend bei einer Wellenlänge von $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ein Brechungsindex von

$$n = 1,519 \pm 0,009 .$$

⁵⁵vgl.: Beschreibung der einzelnen Bauteile in Kapitel 4.2, S.35.

⁵⁶Die Drehgeschwindigkeit der Glasplatte beträgt somit $v \approx 0,27^\circ/\text{s}$. Dieser Wert hat sich für die Messung als ideal herausgestellt.

Für eine höhere Genauigkeit, muss das Verfahren zur Drehung der Glasplatte noch genauer gesteuert werden. Am geschicktesten wäre ein Motor, der die Glasplatte direkt über eine Verbindung mit der Mikrometerschraube dreht. Zusätzlich müsste die Nullposition genau einstellbar sein und die Glasplatte sollte über eine passende Nut in der Halterung fest fixiert werden können. Im Rahmen eines zukünftigen Fortgeschrittenenpraktikumsversuchs wäre es zudem Hilfreich eine Glasplatte zu verwenden, deren Brechungsindex bekannt ist. Die Dicke der Platte sollte überdies bei einem Brechungsindex von ca. 1,5 nicht kleiner als $d = 2,5$ mm sein, da andernfalls zu wenig konstruktive Maxima durchgeföhren werden würden. Auf Grundlage der vorerwähnten Verbesserungsmöglichkeiten ist es mit diesem Aufbau möglich Brechungsindizes, auch bei einmaliger Messung, sehr genau zu bestimmen.

7 Das Michelson-Interferometer im Schulgerätepraktikum

Versuche mit dem Michelson-Interferometer sind in vielen Universitäten und Hochschulen wesentlicher Bestandteil der physikalischen Ausbildung sowohl von angehenden Physikern/innen, als auch von zukünftigen Lehrern/innen in der Physik. Es finden sich dazu zahlreiche Anleitungen, Beschreibungen und Aufgabenstellungen, die im Rahmen eines Praktikumsversuches umgesetzt werden können. Einige dieser Aufgabenstellungen, wie z. B. die Brechzahlbestimmung transparenter Medien oder die Bestimmung der Wellenlänge einer Lichtquelle sind auch für Schülerinnen und Schüler der Qualifikationsphase zugänglich und können im Rahmen eines Schülerlabors an der Universität umgesetzt werden. Ferner ist der prinzipielle Aufbau des Michelson-Interferometers auch mit einfachsten Mitteln realisierbar, sodass der Aufbau eines Interferometers im Physikunterricht möglich ist. Im Folgenden soll der Nutzen des Interferometers in Hinblick auf die Vorgaben der Lehrpläne des Faches Physik sowie die Möglichkeiten zu einer sinnstiftenden Realisierung des Michelson-Interferometers im Rahmen eines Schülerlabors an der Universität und im Rahmen der Möglichkeiten in der Schule erörtert werden. Es soll dabei insbesondere Bezug auf den Bildungsplan des Landes Bremen und das Kerncurriculum des Landes Niedersachsen genommen werden.

7.1 Einordnung in den Bremer Bildungsplan und in das niedersächsische Kerncurriculum

Dem Michelson-Interferometer wird in den Bildungsplänen der Bundesländer eine unterschiedliche Relevanz zugesprochen. Besonders deutlich wird dies beim Vergleich des Bremer Bildungsplanes und des niedersächsischen Kerncurriculums. Der Bremer Bildungsplan für die Qualifikationsphase im Gymnasium⁵⁷ sieht im Fach Physik nicht explizit vor das Michelson-Interferometer im Unterricht zu behandeln. Es kann aber dennoch unter dem Punkt *Themenbezogene fachliche Kompetenzen* im Schwerpunkt Wellenoptik verortet werden. Dort steht u. a.: *Die Schülerinnen und Schüler...*

- *erklären Interferenzerscheinungen mit dem Wellenmodell des Lichts*
- *führen ein Experiment zu Interferenzerscheinungen durch*

Die Kompetenzen sind sowohl Bestandteil im Leistungskurs als auch im Grundkurs Physik. Das Michelson-Interferometer ist neben dem optischen Gitter und dem Doppelspalt eine mögliche Variante, obgleich das Interferometer für die Beschreibung und Untersuchung von *reinen* Interferenzerscheinungen die bessere Variante darstellt. Dies liegt daran, dass reine Interferenzerscheinungen mit einem Doppelspalt oder Gitter nicht realisierbar sind, da hier immer auch Beugungseffekte des Lichtes berücksichtigt werden müssen. Die klare Trennung zwischen Beugungseffekten (Huygenssches Prinzip) und Interferenzerscheinungen ist daher in diesem Zusammenhang nur über den Vergleich zwischen der Intensitätsverteilung des Einzelspalts und z. B. eines Doppelspalts möglich. Anschaulich können Beugungs- und Interferenzeffekte mit Hilfe der Ausbreitung von Wasserwellen und dem Einsetzen verschiedener Hindernisse, wie Einzel- oder Doppelspalt, gezeigt werden.

⁵⁷vgl.: Bremer Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe im Fach Physik [24], Stand 2008

In Hinblick auf die themenübergreifenden fachmethodischen Kompetenzen werden unter dem Punkt *Experimente vorbereiten und durchführen* folgende Punkte im Bildungsplan genannt: *Die Schülerinnen und Schüler...*

- *bauen Versuchsanordnungen nach Anleitung eigenständig auf.*
- *wenden grundlegende Messverfahren routiniert an (Bestimmung von Zeiten, Strecken, Massen, Kräften, Stromstärken, Spannungen etc.).*
- *diskutieren Fehlerquellen bei Experimenten; dokumentieren die Durchführung von experimentellen Untersuchungen und die dabei gewonnenen Messdaten.*

Die genannten Kompetenzen lassen sich gut mit Aufgabenstellungen in Bezug auf einer experimentellen Arbeit der Schülerinnen und Schüler mit dem Michelson-Interferometer verknüpfen. Es bieten sich im Gegensatz zu Interferenzerscheinungen am Doppelspalt und Gitter zudem eine Vielzahl möglicher anwendungsbezogener Messungen an. Zu einigen dieser Messungen sollen kurz mögliche Aufgabestellungen und Ideen stichpunktartig genannt werden. *Die Schülerinnen und Schüler...*

- bestimmen anhand des gemessenen oder vorgegebenen Interferogramms einer monochromatischen Lichtquelle deren Wellenlänge und erläutern das angewandte Verfahren. Sie diskutieren welche Veränderungen im Interferogramm auftreten, wenn sich die Wellenlänge der Lichtquelle ändert. In diesem Zusammenhang können in kleineren Gruppen entsprechende Versuchsaufbauten und Messungen eigenständig umgesetzt werden.
- erläutern das Verfahren zur Bestimmung der Brechzahl eines transparenten Mediums mit bekannter Dicke d und bauen einen dafür geeigneten Interferometeraufbau selbstständig auf. Die Herleitung des Zusammenhangs zwischen Drehwinkel und Brechzahl sollte im Vorfeld geschehen. Hierbei können geometrische und trigonometrische Kenntnisse angewendet und gefestigt werden.
- diskutieren ein mögliches Verfahren zur Messung von minimalen Längenänderungen am Beispiel eines sich ausdehnenden Metallstabes, welcher mit dem beweglichen Spiegel des Interferometers verbunden ist und erhitzt wird.⁵⁸
- erläutern mit Hilfe des Zeigerformalismus die Intensitätsverteilung bzw. die Haidinger'schen Ringe am Beobachtungsschirm.

Im Gegensatz zum Bremer Bildungsplan sieht das niedersächsische Kerncurriculum⁵⁹ im Themenbereich *Schwingungen und Wellen* sowohl auf dem grundlegenden Anforderungsniveau als auch dem erhöhten Anforderungsniveau die Betrachtung des Michelson-Interferometers im Unterricht vor.

⁵⁸Diese Aufgabenstellung basiert auf Erinnerungen einer Aufgabe des Zentralabiturs 2008 auf erhöhtem Anforderungsniveau in Niedersachsen.

⁵⁹vgl.: Niedersächsisches Kerncurriculum für Physik [25], Stand 2009, S.34f

Unter dem Punkt *Inhaltsbezogene Kompetenzen* heißt es: *Die Schülerinnen und Schüler...*

- *beschreiben und deuten Interferenzphänomene für folgende Fälle: stehende Welle, Doppelspalt und Gitter, Michelson-Interferometer, Bragg-Reflexion.*
- *beschreiben ein Experiment zur Bestimmung der Wellenlänge von Mikrowellen mit dem Michelson-Interferometer* (Noch drei weitere Experimente u. a. mit Bragg-Reflexion)

Besonders interessant ist die Einordnung des Interferometers in Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen, in denen „die technische Verwendung des Michelson-Interferometers zum Nachweis kleiner Längenänderungen“ als Thema des Physikunterrichts genannt wird. Des Weiteren wird konkret das angeleitete Auswerten von Experimenten mit dem Michelson-Interferometer sowie die vorstrukturierte und begründete Herleitung relevanter Gleichungen gefordert. Auf dem erhöhten Anforderungsniveau erfolgt zusätzlich der Transfer „mit anderen Wellenarten“.

7.2 Mögliche Realisierungen eines Interferometeraufbaus

Der Aufbau eines Interferometers, mit welchem zusätzliche Messungen durchgeführt werden sollen, ist aufgrund der notwendigen Komponenten, wie z. B. einem nichtpolarisierenden 50:50-Strahlteilerwürfel, als Anschaffung für die Schule im Regelfall zu kostenintensiv. Eine Nutzung mehrerer Interferometer für quantitative Messungen im Physikunterricht ist daher eher unwahrscheinlich. Einfache Aufbauten des Michelson-Interferometers, die grundlegende Effekte zeigen sollen, lassen sich jedoch auch mit verhältnismäßig kostengünstigen Materialien aufbauen, indem auf hochwertige Stativmaterialien und Halterungen sowie eines Strahlteilerwürfels verzichtet wird und stattdessen provisorische Halterungen gebaut werden und eine kostengünstigere 50:50-Strahlteilerplatte verwendet wird. Vorschläge dazu finden sich beispielsweise unter der Überschrift „Interferometrie auf dem Küchentisch.“⁶⁰ Eine weitere Möglichkeit den Aufbau eines Interferometers zu realisieren ist der Einsatz von LEGO-Systemen. Ein solches LEGO-Interferometer wurde mit Bauteilen aus der Physikdidaktiksammlung der Universität Bremen getestet. Interferometeraufbauten dieser Formen in der Schule, z. B. im Rahmen eines Projektes, umzusetzen, bieten die Möglichkeit die experimentellen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler zu fördern und gleichzeitig ein Bewusstsein dafür zu entwickeln, wie präzise solche Aufbauten realisiert werden müssen, um quantitative Ergebnisse zu erzielen. Der selbstständige Aufbau eines Interferometers bietet daher die Möglichkeit über eine Vielzahl von Fehlerquellen und Verbesserungsmöglichkeiten in Hinblick auf die Vorgehensweise und dem Aufbau selbst zu reflektieren.

Um allerdings die technische Relevanz der Anwendung des Michelson-Interferometers in der aktuellen Forschung oder der Industrie glaubwürdig zu vermitteln, ist meiner Ansicht nach die Anwendung eines modernen Interferometeraufbaus unumgänglich. Den SuS sollte es ermöglicht werden ein modernes Bild der Physik im Unterricht zu erhalten, welches bezogen auf das Curriculum stets Bezüge zu aktuellen Anwendungen bietet. Dies würde für die SuS die physikalische und technische Relevanz der Interferometrie und der Interferenz allgemein

⁶⁰siehe: K. P. Möllmann, M. Vollmer (2008) [12], S.30ff

verdeutlichen. Eine Möglichkeit die Arbeit mit modernen und technisch anspruchsvollen Versuchsaufbauten umzusetzen, ist die Nutzung von z. B. Schülerlaboren und -praktika der Universitäten und Hochschulen. In diesem Zusammenhang soll kurz auf das Projekt *LernortLabor* eingegangen werden.

LernortLabor-Bundesverband für Schülerlabore e.V. ist ein 2010 in Hamburg gegründeter Verein, welcher es sich zum Ziel gemacht hat die Arbeit der Schülerlabore in Deutschland zu koordinieren, zu unterstützen und zu vernetzen, um so das Interesse junger Menschen für naturwissenschaftlich-technische Berufsfelder weiter zu fördern.⁶¹ Das Projekt wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung sowie dem Ministerium für Wirtschaft und Technologie gefördert. Die Universität Bremen bietet seit 2002 das sog. Physik-Schülerlabor am Physikalischen Praktikum an.⁶² Zielgruppe des Labors sind Schülergruppen aus den Jahrgängen 9 bis 13, die mit ihren Lehrkräften zusammen die Möglichkeit haben aus über 100 verschiedenen Versuchen einzelne Experimente auszuwählen und eigenständig durchzuführen. Die Schülerinnen und Schüler haben überdies die Möglichkeit eigene Projekte im Rahmen z. B. einer Facharbeit im Schülerlabor zu bearbeiten. Ebenso werden dort regelmäßig bundesweite Lehrerfortbildungen organisiert und durchgeführt, in denen innovative Physikexperimente, die an der Universität gemeinsam mit Studierenden entwickelt und optimiert wurden, vorgestellt werden.

⁶¹vgl.: Homepage des Vereins LernortLabor URL <http://www.lernort-labor.de/le1a.php?t1=1>

⁶²Das Physikalische Praktikum ist seitdem Mitglied im Verein LernortLabor.

8 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde unter Verwendung eines neu angeschafften Schienen- und Reitersystems der Firma PI-miCos ein neuer, deutlich kompakterer Versuchszplatz für das Michelson-Interferometer aufgebaut und verschiedene neue Aufgabenstellungen erprobt und weiterentwickelt.

Im Rahmen der Arbeit wurden die theoretischen Grundlagen, die in der Literatur zum Teil sehr inkonsequent und oft sehr verkürzt oder nur teilweise dargestellt sind, konsequent aufgebaut und geschlossen dargestellt, da die Arbeit als Grundlage zur Einarbeitung in einen zukünftigen Fortgeschrittenen-Praktikumsversuch zum Michelson-Interferometer dienen soll. Ein Schwerpunkt wurde dabei auf die Beschreibung der homogenen und inhomogenen Linienverbreiterungsmechanismen (Lorentz- und Gaußprofil) und den daraus im Michelson-Interferometer resultierenden Interferogrammen sowie der Beschreibung der Interferenzring-systeme gelegt.

In einem ersten Schritt wurde das Hystereseverhalten der verwendeten Piezokeramik untersucht und die Kalibrierungskurven für den geregelten und ungeregelten Modus mit dem Michelson-Interferometer bestimmt. Im ungeregelten Modus konnte, wie erwartet, ein typisches Hystereseverhalten beobachtet werden. Im geregelten Modus ist der Verlauf $\Delta s(U)$ hingegen linear. Zudem wurden mit dem Spektrometer HR2000 die Emissionsspektren der zu verwendenden Lichtquellen einer weißen und roten LED, eines He-Ne-Lasers sowie die Transmissionsspektren dreier Interferenzfilter mit $\lambda = 436, 546$ und 589 nm gemessen und die charakteristischen Merkmale der Spektren bestimmt. Es konnte ein deutlicher Einfluss des Lichtspektrums der weißen LED auf die Transmissionsspektren der Interferenzfilter festgestellt werden. Darüber hinaus wurde die Polarisation innerhalb des Interferometers detailliert untersucht. Die Messungen zeigten, dass sich die Polarisation bei jeder Reflexion an den Spiegeln und am Strahlteiler aufgrund des komplexen Brechungsindex des Metalls in Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung des eingestrahlteten Lichtes ändert.

Mit einem Spektrometer HR2000 wurde das durch das Michelson-Interferometer erzeugte Interferenzringssystem einer roten LED untersucht. Die Messungen ergaben, dass sich die spektrale Zusammensetzung der Interferenzringe in Abhängigkeit vom Gangunterschied Δs der Spiegel verändert. Die beiden Spiegel des Interferometers fungieren dabei in Analogie zu einem Fabry-Pérot-Resonator der Dicke Δs , welcher nur bestimmte Moden im Spektrum zulässt. Aus den Modenabständen der gemessenen Strukturen in den Spektren für verschiedene Spiegelabstände Δs konnten die Resonatorlängen bzw. die Abstände der Spiegel Δs exakt bestimmt werden.

Zur Vermessung der Interferogramme $I(\Delta \tilde{s})$ wurde eine Photodiode im Zentrum des Interferenzring-systems positioniert und der Wegunterschied Δs der Spiegel mit Hilfe des Piezoverstellers linear verändert. Das gemessene Photospannungssignal ist proportional zur Intensität $I(\Delta \tilde{s})$ der Interferogramme und wurde mit Hilfe eines CASSY-Systems aufgezeich-

net. Aus den Interferogrammen und den durch eine Peakanalyse bestimmten Einhüllenden konnten direkte Aussagen über die Kohärenzlängen und damit der spektralen Breiten $\Delta\lambda$ der verwendeten Lichtquellen gemacht werden. Über eine FFT des Interferogramms wurden die Spektren der Lichtquellen berechnet. Für das Emissionsspektrum der roten LED ergab sich ein in guter Näherung lorentzförmiger Verlauf der Einhüllenden. Das über die FFT berechnete Spektrum war in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Emissionsspektrum der roten LED. Die ermittelten spektralen Halbwertsbreiten FWHM des gemessenen Spektrums und die Halbwertsbreite des über die FFT berechneten Spektrums sowie die berechnete Breite aus der Einhüllenden stimmten im Rahmen der Messungenauigkeiten gut überein. In einem weiteren Schritt wurde das Interferogramm und das Emissionsspektrum einer weißen LED gemessen. Auch hier konnte, unter Berücksichtigung der Sensitivität der verwendeten Photodiode OPT301, der Verlauf des Emissionsspektrums über die FFT des Interferogramms berechnet werden. Die Auswertung der Interferogramme zu den Transmissionsspektren der Interferenzfilter ergab ein für jeden Filter charakteristischen Verlauf der Einhüllenden. Der IF mit $\lambda = 546$ nm zeigte einen deutlichen nach links und rechts exponentiell abklingenden Verlauf der Einhüllenden, was auf ein Lorentzprofil des Transmissionsspektrums schließen lässt. Die IF mit $\lambda = 436$ und 589 nm hingegen lassen ein Lorentzprofil der Einhüllenden des Interferogramms erkennen. Insbesondere beim Filter mit $\lambda = 589$ nm ist der Verlauf der Einhüllenden durch einen gaußförmigen Anteil verbreitert. Im Interferogramm des Filters mit 436 nm konnte eine charakteristische Sattelstelle im Profil beobachtet werden, die vermutlich auf eine Schulter im Emissionsspektrum der weißen LED zurückzuführen ist. Die resultierenden spektralen Breiten FWHM aus den Einhüllenden der Interferogramme, der über die FFT berechneten Spektren und der mit dem Spektrometer HR2000 gemessenen Spektren stimmen nicht gut überein.

Mit dem Interferometer konnten die aus der Doppellinie der Natriumdampfampe resultierenden Schwebungen im Interferogramm in Form von Schwebungspunkten mit geringem und hohem Kontrast beobachtet und die Schwebungswellenlänge λ_s vermessen werden. Es stellte sich heraus, dass neben der Na-D-Linie noch weitere Linien zu zusätzlichen Schwebungen im Interferogramm führen und den Messvorgang erschweren. Das Problem konnte umgangen werden, indem ein IF mit 589 nm verwendet wurde, der ausschließlich die Na-D-Linie transmittiert. Es konnte so ein Linienabstand von $\Delta\lambda = (0,59 \pm 0,01)$ nm ermittelt werden.

Zusätzlich wurden die Axial-Moden eines grünen Halbleiterlasers (LFD532-1) mit einer Wellenlänge von $\lambda = 532$ nm untersucht. Bei der Messung wurden zwei Schwebungen unterschiedlichen Kontrastes im Interferogramm beobachtet und vermessen. Aus den Abständen der Schwebungspunkte wurde der freie Spektralbereich des Lasers mit einem Wert von $\Delta\nu_{\text{FSR}} \approx 150$ GHz ermittelt. Die Messung des freien Spektralbereichs war mit einer schnellen Photodiode und einem Spektrumanalysator aufgrund des begrenzten Messbereichs nicht mehr möglich. Mit der Vermessung der Laserlinie, unter Verwendung eines hochauflösenden Gitterspektrometers, konnten insgesamt drei Moden im Laserprofil nachgewiesen werden, deren Abstände in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen freien Spektralbereich von 150 GHz stehen.

Des Weiteren wurde der Brechungsindex einer Glasplatte bestimmt. Für die Messung wurde die Glasplatte in einen der Interferometerarme auf einem Rotationstisch positioniert und mit Hilfe eines in der Drehgeschwindigkeit präzise einstellbaren Motors gedreht. Aus der Anzahl der Durchgänge im Interferenzbild und des Drehwinkels wurde der Brechungsindex zu $n = 1,519 \pm 0,009$ sehr genau bestimmt.

Im letzten Abschnitt wurde die Bedeutung des Michelson-Interferometers in den Curricula des Landes Bremen und Niedersachsens betrachtet und ein möglicher Einsatz des Michelson-Interferometers in der Schule und im Rahmen eines Schülerlabors diskutiert. Es zeigte sich, dass es möglich ist auch in der Schule mit einfachsten Mitteln ein funktionierendes Interferometer aufzubauen. Der Umgang mit einem modernen und technisch anspruchsvollen Interferometeraufbaus ist jedoch nur im Rahmen eines Schülerlabors an der Universität oder Hochschule möglich.

Insgesamt ergibt sich aus der vorliegenden Arbeit ein breites Spektrum an anspruchsvollen Messaufgaben für einen zukünftigen Fortgeschrittenen-Praktikumsversuch. Die Arbeit soll dabei den Studierenden helfen sich vor dem Versuch umfassend in die Thematik einzuarbeiten.

Literatur

- [1] Ludwig Bergmann, Clemens Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band 4 *Bestandteile der Materie: Atome, Moleküle, Atomkerne, Elementarteilchen*, 2. Auflage, de Gruyter-Verlag Berlin, 2003
- [2] Iyer Deepak N.: *A Michelson interferometric technique for measuring refractive index of sodium zinc tellurite glasses*, Lehigh University, Januar 2007, URL <http://preserve.lehigh.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1954&context=etd>, Bremen, den 16.04.2014
- [3] Wolfgang Demtröder: Experimentalphysik 2 *Elektrizität und Optik*, 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [4] Prof. Dr. Rainer Dohlus: Photonik *Physikalisch-Technische Grundlagen der Lichtquellen, der Optik und des Lasers*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2010
- [5] Jan Eggemann: Bachelorarbeit, *Aufbau einer mit LabVIEW gesteuerten Apparatur zur Messung der Fluoreszenz und Absorption*, Universität Bremen, 2012
- [6] Jan Eggemann: Masterarbeit, *Konzeption, Aufbau und Erprobung eines Demonstrationsexperiments zu Quantenmechanischen Phänomenen auf Grundlage der Mach-Zehnder Interferometrie*, Universität Bremen, 2014
- [7] Jürgen Eichler, Hans Joachim Eichler: Laser *Bauformen, Strahlführung, Anwendung*, 6. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 2006
- [8] A. Gerlach: Praktikumsanleitung zur Fourier-Transform Infrarotspektroskopie an Proteinen, Universität Tübingen, Oktober 2005, URL http://www.uni-tuebingen.de/Teilchenoptik/html/fprakt/pdf/ftir_anleitung.pdf, Bremen, den 16.09.2014
- [9] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*, Fourth Edition 1965, Seventh Printing, Academic Press New York and London, 1973
- [10] Jan Kehlbeck: Bachelorarbeit, *Aufbau eines Versuches für das Fortgeschrittenenpraktikum zu den Grundlagen des He-Ne-Lasers*, Universität Bremen, 2012
- [11] Prof. Dr. Ursula Keller: Kap 4 *Interferenz und Kohärenz*, ETH Zürich, Quantenelektronik, FS11, URL http://www.ulp.ethz.ch/education/PhysikII/Lecture_QE_Keller_Kap4.pdf, Bremen, den 15.07.2014
- [12] Prof. Dr. Klaus-Peter Möllmann, Prof. Dr. Michael Vollmer: Physik unserer Zeit, Artikel: *Interferometrie auf dem Küchentisch. Wellenoptik*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2008
- [13] W. Kleen, R. Müller: Laser *Verstärkung durch induzierte Emission, Sender optischer Strahlung hoher Kohärenz und Leistungsdichte*, Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 1969
- [14] Paul Profos, Tilo Pfeifer: Handbuch der industriellen Messtechnik, 6. Auflage, R. Oldenbourg Verlag GmbH München, 1994

- [15] Philipp Georg Schumann: Dissertation *Selektiver Nachweis von Uran-236 mittels hochauflösender Resonanzionisations-Massenspektrometrie*, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2005, URL <http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2006/1003/pdf/diss.pdf>, Bremen, den 26.06.2014
- [16] Jörn Stenger: Skriptum zur Vorlesung Technische Optik *Laser*, Institut für Hochfrequenztechnik Technische Universität Braunschweig, WS 2008/2009, URL https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/ihf/laser_skript_ws0809.pdf, Bremen, den 27.06.2014
- [17] Dr. Norbert Stockhausen: FH München - Praktikum Sensorik, *Untersuchung der Eigenschaften eines Piezoaktors und eines Peltierelements mit Hilfe eines Michelson-Interferometers*, URL https://www.fb06.fh-muenchen.de/fb/index.php/de/download.html?f_id=1171, Bremen, den 01.10.2014
- [18] Hochschule für angewandte Wissenschaften - FH München, Physikalisches Praktikum II *Michelson-Interferometer (MIF)*, URL http://w3-o.hm.edu/fb06/professoren/maier/PraktikumPh4/Anleitungen/MIF_WS1213.pdf, Bremen, den 17.07.2014
- [19] TU Dresden - Institut für Angewandte Photophysik: HO-Holographie *Ausführliche Anleitung*, Version 2.7, April 2012, URL http://tudresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/fakultaet_mathematik_und_naturwissenschaften/fachrichtung_physik/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/H0-2-7.pdf, Bremen, den 02.04.2014
- [20] Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute): *GEO600*, URL http://www.aei.mpg.de/18508/01_GEO600?page=1, Bremen, den 09.09.2014
- [21] Forschungszentrum der Bundesrepublik Deutschland für Luft- und Raumfahrt (DLR): LISA Pathfinder Datenblatt (Stand 2013), URL http://www.dlr.de/rd/Portaldata/28/Resources/dokumente/rx/LISA-PF_D_04_13.pdf, Bremen, den 18.09.2014
- [22] The Official Web Site of the Nobel Prize: *All Nobel Prizes in Physics*, URL http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/, Bremen den 03.10.2014
- [23] European Gravitational Observatory (EGO): *The Virgo interferometer*, URL http://www.ego-gw.it/virgodescription/pag_4.html, Bremen, den 09.09.2014
- [24] Die Senatorin für Bildung und Wissenschaft: Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe: *Qualifikationsphase* im Fach Physik, Stand 2008, URL <http://www.lis.bremen.de>, Bremen, den 10.09.2014
- [25] Niedersächsisches Kultusministerium: Kerncurriculum für das Unterrichtsfach Physik für den Sekundarbereich II, 2009, URL http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_physik_go_i_2009.pdf, Bremen, den 10.09.2014

- [26] Homepage von *LASER FUCHS*, Datenblatt zum grünen Laser LFD532-1-3(12x60)-001, URL <http://media.laserfuchs.de/datasheets/LFD532-1-3%2812x60%29-001.pdf>, Bremen, den 07.08.2014
- [27] Homepage von Piezosystem Jena, Equipment for Nanopositioning: *Technische Informationen - Piezo-Theorie*, URL http://www.piezosystem.de/piezo_nanopositionierung/downloads/technische_informationen/piezo_theorie/#c2643, Bremen, den 01.10.2014

Abbildungsverzeichnis

1	Albert Abraham Michelson (1852-1931).	3
2	Lorentzförmige Intensitätsverteilung $I(\lambda)$ einer Lichtquelle mit Halbwertsbreite $\Delta\lambda$	7
3	Zwei Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 (oben). Überlagerte Schwingung mit einhüllendem Kurvenverlauf und eingezeichneter Schwebungsperiode T_s (unten).	8
4	Abklingende Amplitude des elektrischen Feldes beim Aussenden eines Photons (links). Die Intensität klingt demgemäß mit dem Faktor γ ab. Rechts ist das Lorentzprofil als Fouriertransformierte mit der Halbwertsbreite γ dargestellt.	11
5	Geschwindigkeitskomponenten eines Emitters.	12
6	Vergleich eines Lorentz- und Gauß-Profiles mit gleicher Halbwertsbreite und gleicher integraler Intensität.	13
7	Schematische Darstellung des Michelson-Interferometers.	15
8	Transmittierte Intensität I/I_0 der Interferenz im Michelson-Interferometer in Abhängigkeit von der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ beider Teilwellen.	17
9	Links: Schematische Darstellung der Interferenz gleicher Neigung im Michelson-Interferometer mit zwei direkt hintereinander liegenden virtuellen Lichtquellen Q_1 und Q_2 . Es entsteht ein System aus konzentrischen Ringen. Rechts: Darstellung der Interferenz gleicher Dicke mit leicht zueinander verkippten Spiegeln. Q_1 und Q_2 liegen nun auf gleicher Höhe. Es entsteht dabei ein System aus Interferenzstreifen.	18
10	Strahlengang im Interferometer eines einfallenden divergenten Strahls und einer Wegdifferenz $\Delta s = 0$ der beiden Spiegel.	19
11	Vereinfachter Strahlengang im Michelson Interferometer.	19
12	Intensitätsverlauf $I(z)$ eines Ringsystems am Beobachtungsschirm in Richtung der z -Komponente für verschiedene Gangunterschiede Δs vor und hinter der Weißlichtposition.	20
13	Interferenzringsystem beim Michelson-Interferometer für verschiedene Gangunterschiede Δs	20
14	Interferogramm einer idealen, natürlich verbreiterten Lichtquelle. Die Einhüllende hat die Form zweier nach rechts und links abklingender Exponentialfunktionen.	23
15	Interferogramm einer dopplerverbreiterten Lichtquelle. Die Einhüllende entspricht einem Gaussprofil.	24
16	Interferogramm einer Schwebung mit unterschiedlichen Frequenzen ν_1 und ν_2 und Amplituden (links) sowie die Fourier-Transformierte $S(\tilde{\nu})$ des Interferogramms in Abhängigkeit von der Wellenzahl $\tilde{\nu}$ (rechts). Die Transformation liefert zwei δ -Peaks für die beitragenden Frequenzen. Es wurden nur die positiven Frequenzen dargestellt.	26
17	Strahlengang durch eine um 35° verkippte Glasplatte.	27
18	Aufbau des Michelson-Interferometers mit dem He-Ne-Laser in der x,y -Ebene (Draufsicht).	29

19	Montagestange mit $\varnothing 8$ mm sowie M4 Innen- und Außengewinde.	31
20	Vorderansicht des montierten Spiegels M_2 (links) und Rückansicht der Halterung mit den Mikrometerschrauben (rechts).	31
21	Piezoversteller mit montiertem Spiegel M_1	32
22	Schematische Darstellung des piezoelektrischen Effekts am Beispiel eines α -Quarzkristalls. Dargestellt ist das entlastete Gitter des Quarzkristalls (links) und der belastete Kristall (rechts). Aufgrund der gerichteten Belastung kommt es zu einer Verschiebung der Schwerpunktladungen und zur Ausbildung eines elektrischen Feldes.	33
23	Hin- und zurücklaufender Verschiebeweg Δs des Piezos in Abhängigkeit von der Ansteuerspannung U im unregelmäßigten Modus. Dargestellt ist ein Verlauf von 0 bis 10 V (dunkelgrau) und ein zweiter Verlauf von 0 bis 5 V (hellgrau). Die Spannungswerte sowie der maximale Verschiebeweg orientieren sich an dem verwendeten Piezo von Linos.	34
24	Montierter Strahlteilerwürfel.	34
25	Montierte Glasplatte.	35
26	Photodiode OPT301 in der Seitenansicht (links) und der Ansicht von Hinten (rechts).	36
27	Halterung für LEDs und Linsen.	37
28	Spektrum des He-Ne-Lasers. Diese Laserlinie zeigt eine verschobene Peakwellenlänge bei $\lambda = 631,62$ nm.	38
29	Darstellung $I = I(\theta)$ zur Charakterisierung der Polarisation des He-Ne-Lasers.	39
30	Änderung der Polarisationsrichtung im Michelson-Interferometer.	39
31	Interferenzringe für vier verschiedene Wegunterschiede $\Delta s > 0$. Der Spiegelabstand Δs wird von links nach rechts größer.	41
32	Aufnahme des Verlaufs der Interferenzringe bei einem sich verändernden optischen Wegunterschied von insgesamt einer Wellenlänge λ	41
33	Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0 – 10 V und einer Frequenz von $\nu = 0,011$ Hz im unregelmäßigten Modus. Es wurde nur der aufsteigende Verlauf angefügt.	42
34	Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0 – 10 V und einer Frequenz von $\nu = 0,011$ Hz im geregelten Modus. Es wurde nur der aufsteigende Verlauf angefügt.	43
35	Normiertes Spektrum der roten LED. Es wurden zusätzlich die Halbwertsbreite FWHM, die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} eingezeichnet.	44
36	Emissionsspektrum der weißen LED und Transmissionsspektren der Interferenzfilter mit 436, 546 und 589 nm.	45
37	Spektren der Interferenzfilter mit den Wellenlängen 436, 546 und 589 nm. Lichtquelle ist die weiße LED.	46
38	Versuchsaufbau zur Interferogrammaufnahme einer LED.	48

39	Interferenzbild der roten LED bei einem Spiegelabstand $\Delta s \approx 0 \mu\text{m}$ nahe der Weißlichtposition (links) und einem Abstand $\Delta s \approx 20 \mu\text{m}$ (rechts).	49
40	Spektrn eines Interferenzrings der roten LED bei vier verschiedenen Positionen $\Delta s_{i+1} < \Delta s_i$ hinter der Weißlichtposition.	50
41	Spektrn eines Interferenzrings der weißen LED bei zwei verschiedenen Positionen $\Delta s_2 > \Delta s_1$ hinter der Weißlichtposition.	51
42	Interferogramm einer roten LED über die optische Wegstrecke $\Delta \bar{s}$. Der Piezo wurde im Regelbetrieb gefahren.	52
43	Normierter Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms einer roten LED über die optische Wegstrecke $\Delta \bar{s}$ im geregelten Modus. Die Kohärenzlänge beträgt $\Delta l = (19,0 \pm 0,1) \mu\text{m}$. Es wurde eine Lorentzfunktion angefitet.	53
44	Normierter Verlauf der FFT und des Spektrums der roten LED.	54
45	Interferenzringe der weißen LED.	55
46	Interferogramm einer weißen LED über die optische Wegstrecke $\Delta \bar{s}$. Der Piezo wurde im Regelbetrieb gefahren.	55
47	FFT des Interferogramms und Spektrum der weißen LED.	56
48	Interferogramme (a) und deren normierte Einhüllenden (b) der drei Interferenzfilter mit $\lambda = 436, 546$ und 589 nm . Der Piezo wurde im geregelten Modus gefahren.	58
49	Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms des Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta \bar{s}$ im geregelten Modus.	59
50	Wirkung des Emissionsspektrums der weißen LED auf das Transmissionsspektrum $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda_{\text{Filter}} \approx 436 \text{ nm}$. Das Emissionsmaximum des Blauanteils der weißen LED liegt bei $\lambda_{\text{LED}} \approx 448 \text{ nm}$	60
51	Konstruktiver Schwebungspunkt mit hohem Kontrast (links) und ein benachbarter destruktiver Schwebungspunkt mit niedrigem Kontrast (rechts).	62
52	Spektrum der Na-Dampflampe bei einer hohen eingestrahnten Intensität. Die Intensität der Na-D-Line ist bewusst übersteuert, um weitere Übergänge sichtbar zu machen. Mit dem verwendeten Spektrometer HR2000 ist die Na-D-Linie nicht zu trennen.	63
53	Verstärkungsprofil $G(\nu)$ einer Laserlinie mit einer Halbwertsbreite $\Delta \nu_{\text{gain}}$ sowie die möglichen longitudinalen Resonatormoden, hier mit Frequenzabstand $\Delta \nu_{\text{FSR}} = 150 \text{ GHz}$	65
54	Skizze des beobachteten Kontrastverlaufs $K(\Delta s)$ der Schwebungen im Interferogramm des grünen Halbleiterlasers. K_1 und K_2 bezeichnen die gemessenen destruktiven Schwebungspunkte.	66
55	Hochaufgelöste 532 nm -Linie des grünen Halbleiterlasers (LFD532-1). Die absolute Lage der Wellenlängenskala ist leicht verschoben.	67
56	Beobachtete Ringstruktur des Laserprofils des grünen Lasers LFD532-1. Die Laserlinie wurde mit einer Linse aufgeweitet.	68
57	Drei verschiedene Intensitätsverteilungen der Gauß-Laguerre-Moden $\text{TEM}_{p,l}$	69
58	Versuchsaufbau zur Messung der Brechzahl einer Glasplatte.	70

59 Intensitätsverlauf für eine um $15,52^\circ$ gedrehte Glasplatte mit einer Dicke von $d = 2,5$ mm. Es konnten 101 konstruktive Durchgänge nach der Nullposition gezählt werden. 71

60 Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0-10 V und zwei Frequenz $\nu_1 = 0,011$ Hz und $\nu_2 = 0,042$ Hz im ungeretzten Modus. Der Verlauf von ν_2 ist nach unten verschoben. 90

61 Emissionsspektrum der weißen LED mit hohem Blauanteil. 90

62 Ausschnitt des Emissionsspektrums der weißen LED mit hohem Blauanteil. Es wurde die Schulter bei $\lambda_{\text{Peak}} \approx 442$ nm gekennzeichnet 91

63 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 436$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (14,1 \pm 0,2)$ nm. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} 91

64 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 546$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (7,9 \pm 0,2)$ nm. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} 92

65 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (10,0 \pm 0,2)$ nm. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} 92

66 Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 436$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. 93

67 Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 546$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. 93

68 Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 589$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED. 94

69 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 436$ nm und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt. 94

70 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 546$ nm und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt. 95

71 Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt. 95

72 Versuchsaufbau in der x,y -Ebene mit der Natriumdampfampe als Lichtquelle. 96

73 Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436$ nm über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben. 97

74 Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine Lorentzfunktion angefittet und die $1/e$ -Breite bzw. Kohärenzlänge Δl bestimmt. 97

75 Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 438,5 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt. 98

76 Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben. 98

77 Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine nach links und rechts abklingende Exponentialfunktion angefittet. 99

78 Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 538 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt. 99

79 Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben. 100

80 Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine Lorentzfunktion angefittet. 100

81 Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 589,5 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt. 101

Tabellenverzeichnis

1	Wellenlängen der roten LED und der Filter.	45
2	Schwerpunktswellenlängen λ_{Sch} , Peakwellenlängen λ_{Peak} und Halbwertsbreiten $\text{FWHM}_{\text{Filter}}$ der Transmissionsspektren der Interferenzfilter.	46
3	Mittlere Modenabstände $\Delta\bar{\lambda}$ und die daraus berechneten mittleren Spiegelabstände Δs_{Theo} sowie die gemessenen Abstände Δ_{Exp} der vier aufgenommenen Spektren.	51
4	Wellenlängen der roten LED und der Filter.	58
5	Kohärenzlängen Δl der Kontrastfunktionen der Filter und die berechneten spektralen Breiten $\text{FWHM}_{\text{Intf}}$ sowie die gemessenen Halbwertsbreiten der FFT und der gemessenen Spektren.	61
6	Kohärenzlängen Δl aus den Interferogrammen (Intf) und Spektren (Spek) der roten LED und der Interferenzfilter.	61

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendete Textauschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Bremen, den

Ort/ Datum

Unterschrift

Anhang

Kalibrierungskurve bei zwei verschiedenen Frequenzen

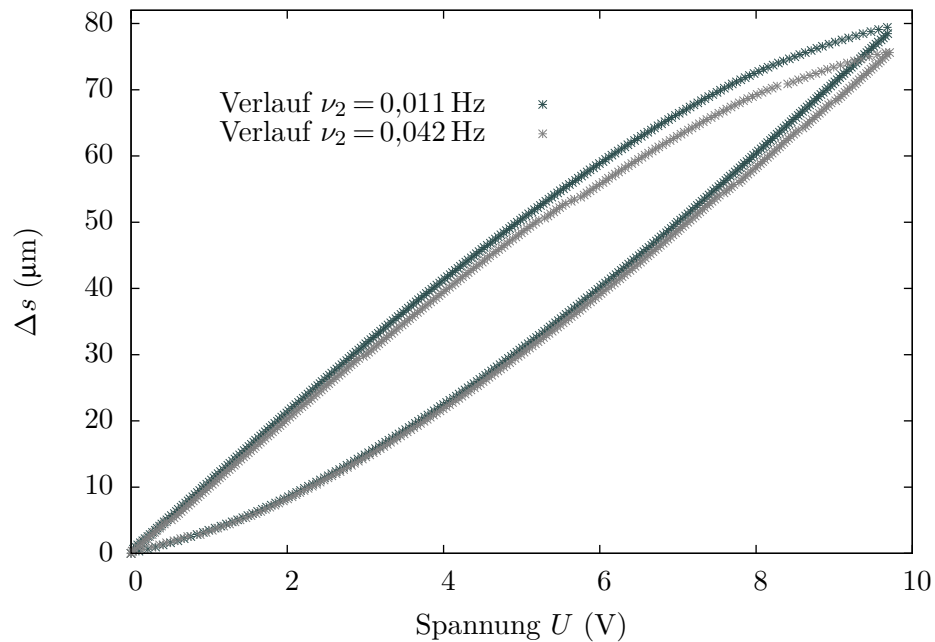


Abb. 60: Kalibrierungskurve der Verschiebung Δs des Piezokristalls für ein Dreieckssignal im Intervall 0-10 V und zwei Frequenzen $\nu_1 = 0,011 \text{ Hz}$ und $\nu_2 = 0,042 \text{ Hz}$ im ungerichteten Modus. Der Verlauf von ν_2 ist nach unten verschoben.

Spektren der weißen LEDs

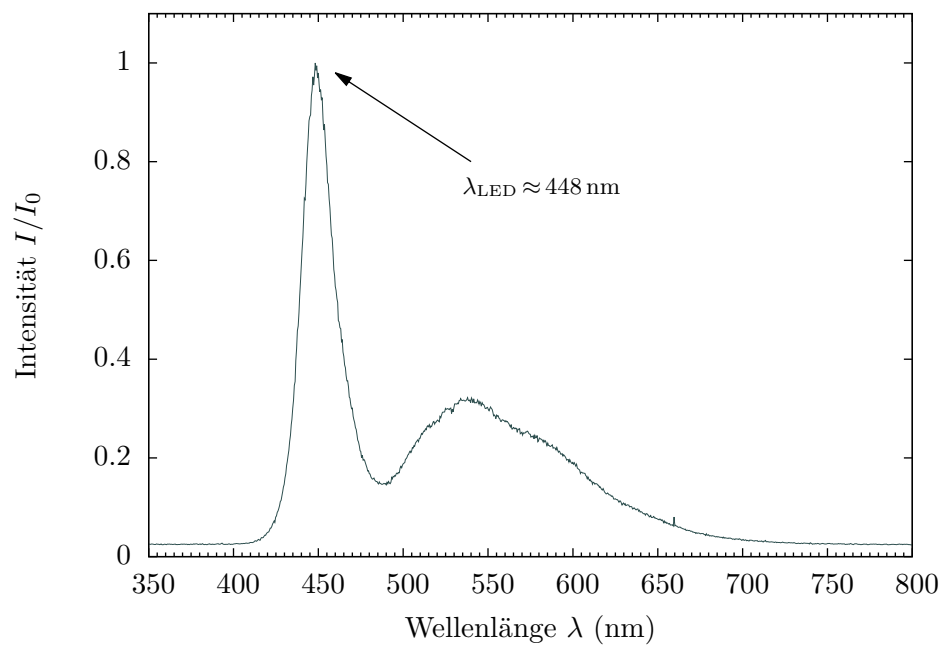


Abb. 61: Emissionsspektrum der weißen LED mit hohem Blauanteil.

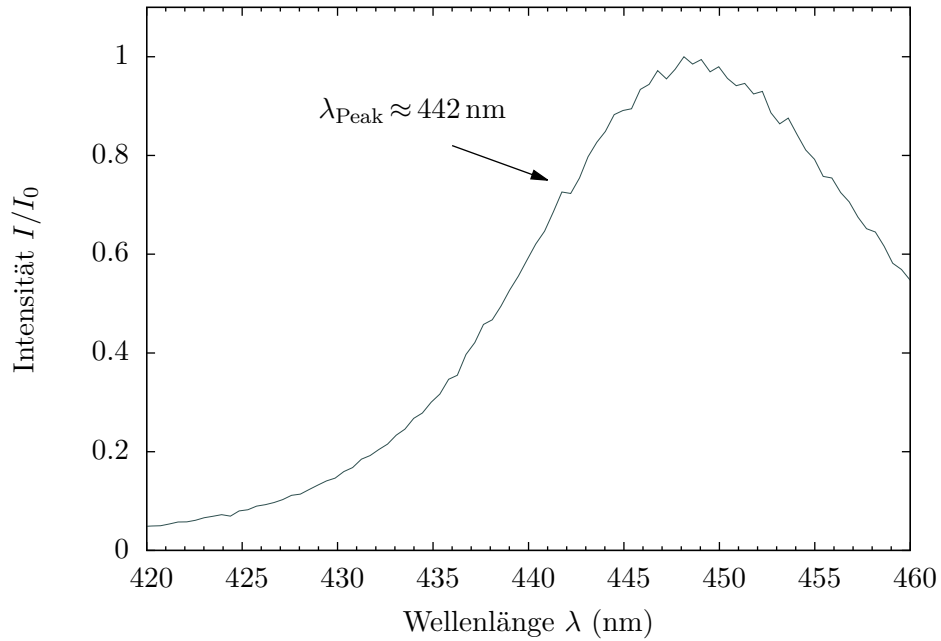


Abb. 62: Ausschnitt des Emissionsspektrums der weißen LED mit hohem Blauanteil. Es wurde die Schulter bei $\lambda_{\text{Peak}} \approx 442 \text{ nm}$ gekennzeichnet

Aufgenommene Transmissionsspektren der Interferenzfilter mit dem Spektrometer HR2000

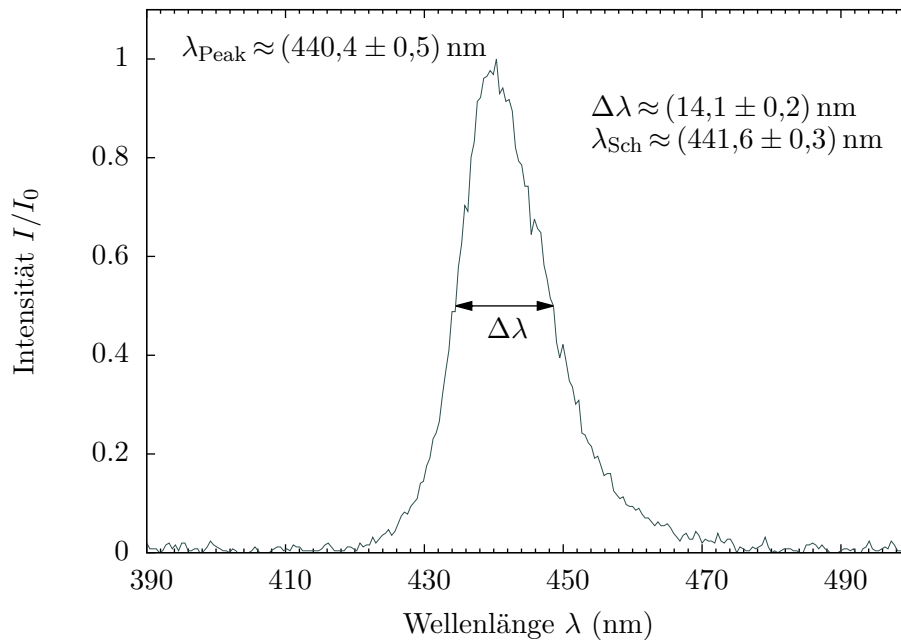


Abb. 63: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 436 \text{ nm}$. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (14,1 \pm 0,2) \text{ nm}$. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktwellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} .

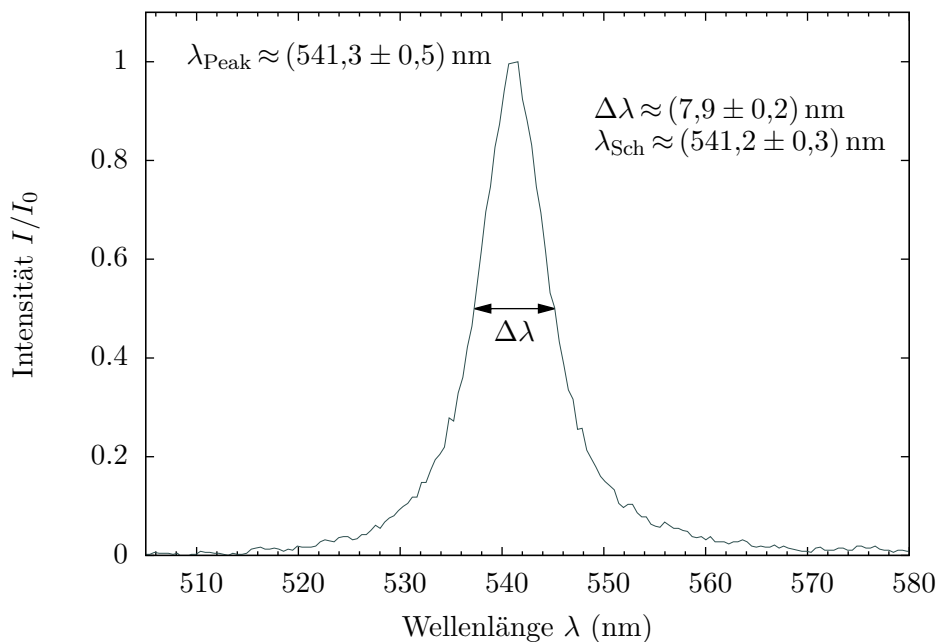


Abb. 64: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 546 \text{ nm}$. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (7,9 \pm 0,2) \text{ nm}$. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} .

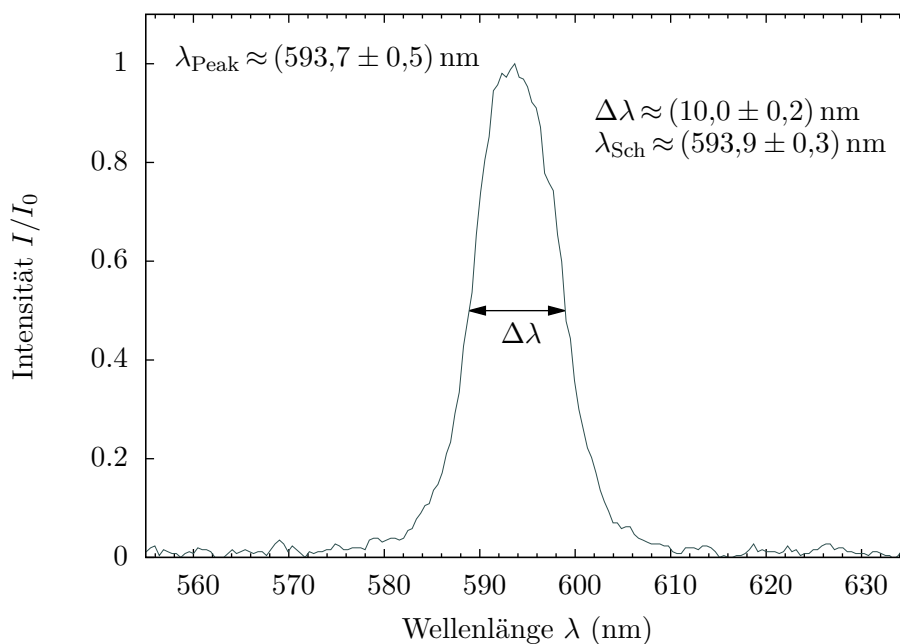
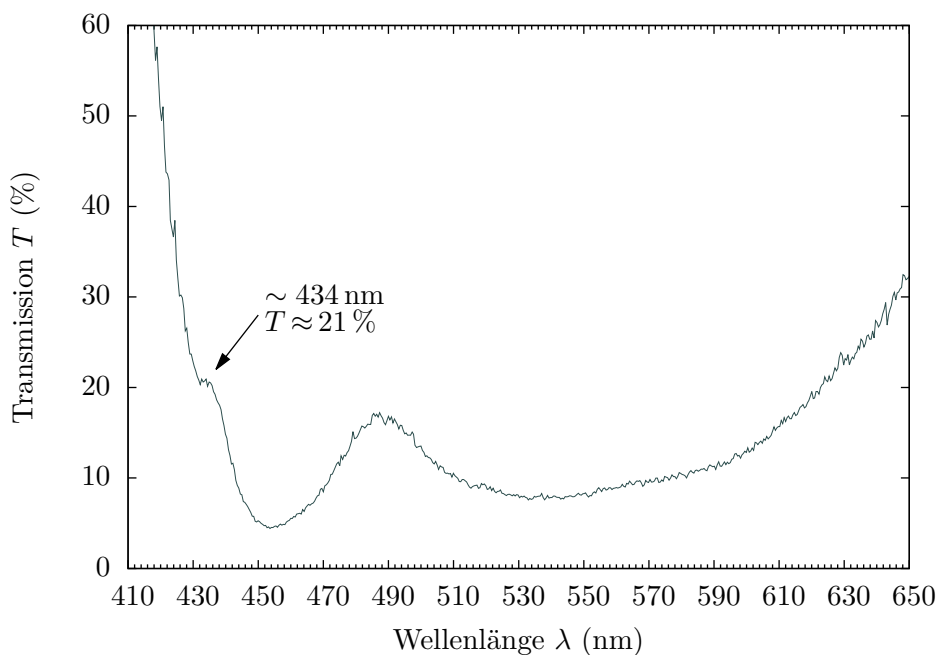
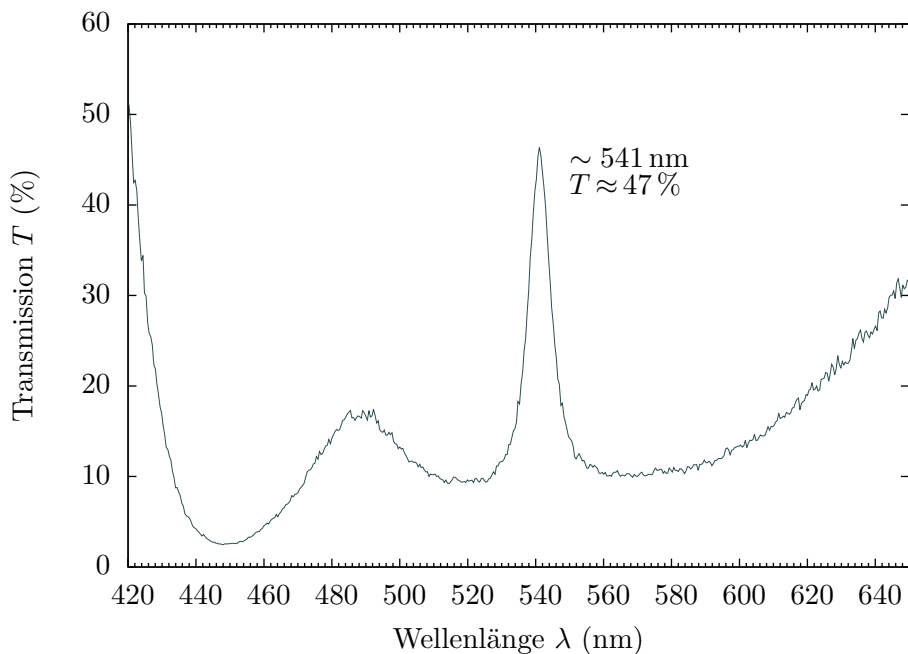


Abb. 65: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 589 \text{ nm}$. Lichtquelle ist die weiße LED. Die Halbwertsbreite FWHM beträgt $\Delta\lambda \approx (10,0 \pm 0,2) \text{ nm}$. Zusätzlich angegeben sind die Schwerpunktswellenlänge λ_{Sch} und die Peakwellenlänge λ_{Peak} .

Transmissionspektren $T(\lambda)$ der Interferenzfilter mit der weißen LED als Lichtquelle**Abb. 66:** Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 436$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED.**Abb. 67:** Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 546$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED.

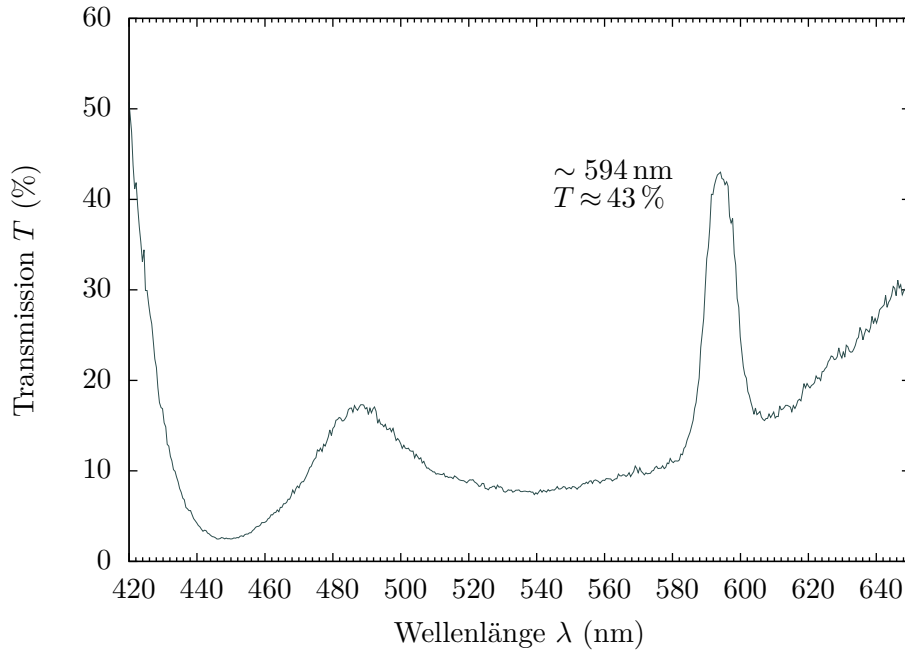


Abb. 68: Transmission $T(\lambda)$ des Interferenzfilters mit $\lambda = 589$ nm. Lichtquelle ist die weiße LED.

Transmissionsspektren der Interferenzfilter und die berechneten Spektren der FFT aus den Interferogrammen im Vergleich

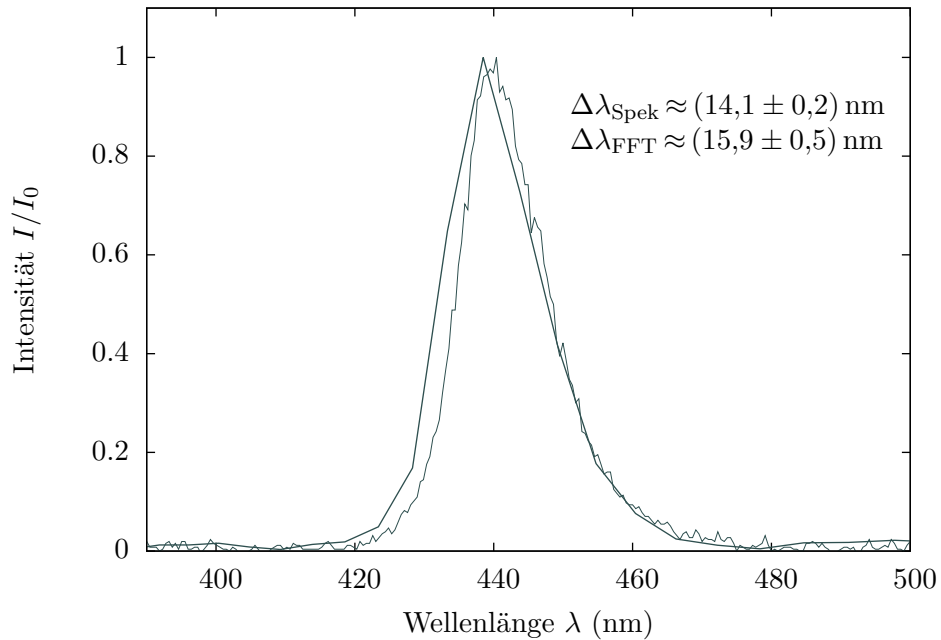


Abb. 69: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 436$ nm und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt.

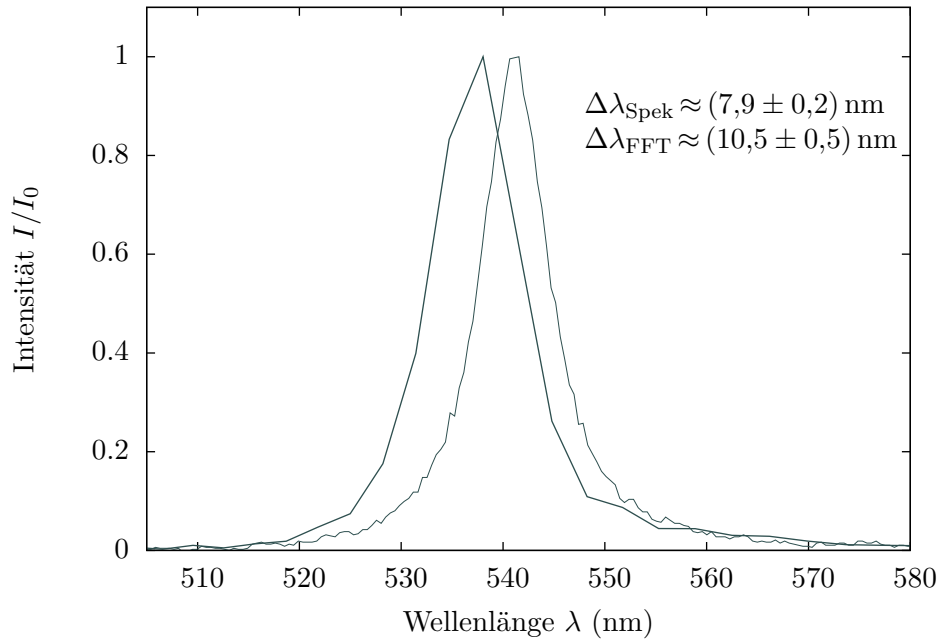


Abb. 70: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 546 \text{ nm}$ und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt.

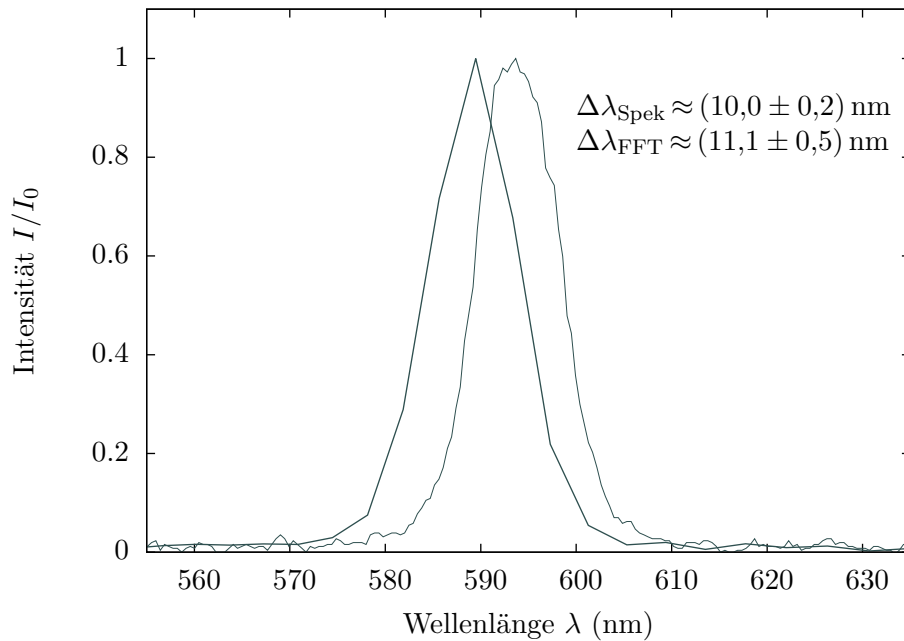


Abb. 71: Transmissionsspektrum des Interferenzfilters mit der Wellenlänge $\lambda = 589 \text{ nm}$ und die berechnete FFT des dazugehörigen Interferogramms im Vergleich. Die Halbwertsbreiten $\Delta\lambda$ sind in der Darstellung beigefügt.

Versuchsaufbau mit der Natriumdampfampe als Lichtquelle

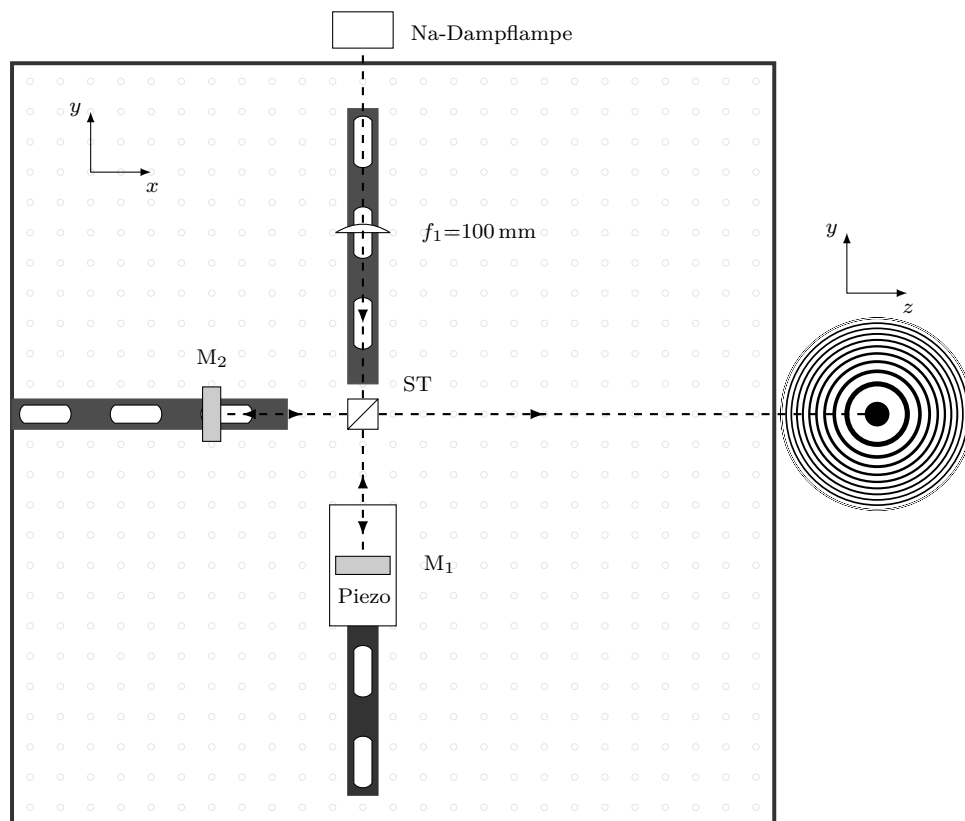


Abb. 72: Versuchsaufbau in der x,y -Ebene mit der Natriumdampfampe als Lichtquelle.

Quellcode für die Fouriertransformation (FFT) der Interferogramme mit Octave

Der Quellcode für Octave liest die Daten aus der entsprechenden .txt-Datei ein und speichert die transformierten Werte im Verzeichnis /home/Benutzer als .txt-Datei.

```
[name, pfad] = uigetfile;
daten = load([pfad, '/', name], '-ascii');

N=length(daten(:,1));
ftast=length(daten(:,1))/(max(daten(:,1))-min(daten(:,1)));
spec = abs(fft(daten(:,2), N));
f = linspace(0, ftast/2, N/2);
plot(f, spec(1:N/2));

save_trafo_y = spec(1:N/2);
save('/home/Benutzer/trafo_y.txt', 'save_trafo_y');
save_trafo_x = transpose(f);
save('/home/Benutzer/trafo_x.txt', 'save_trafo_x');
```

Interferogramme, Einhüllende und FFTs für die Messungen mit den Interferenzfiltern

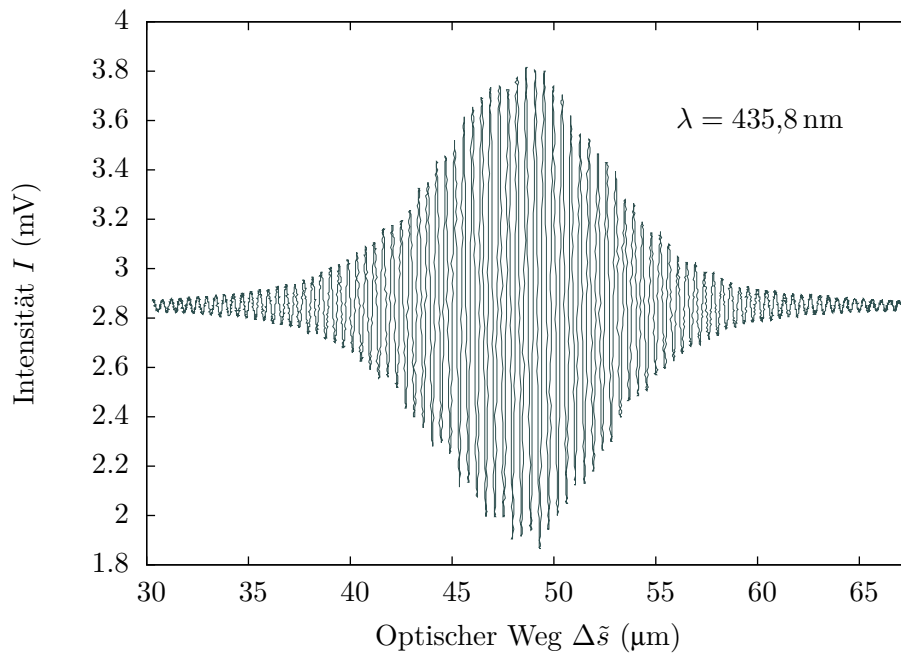


Abb. 73: Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben.

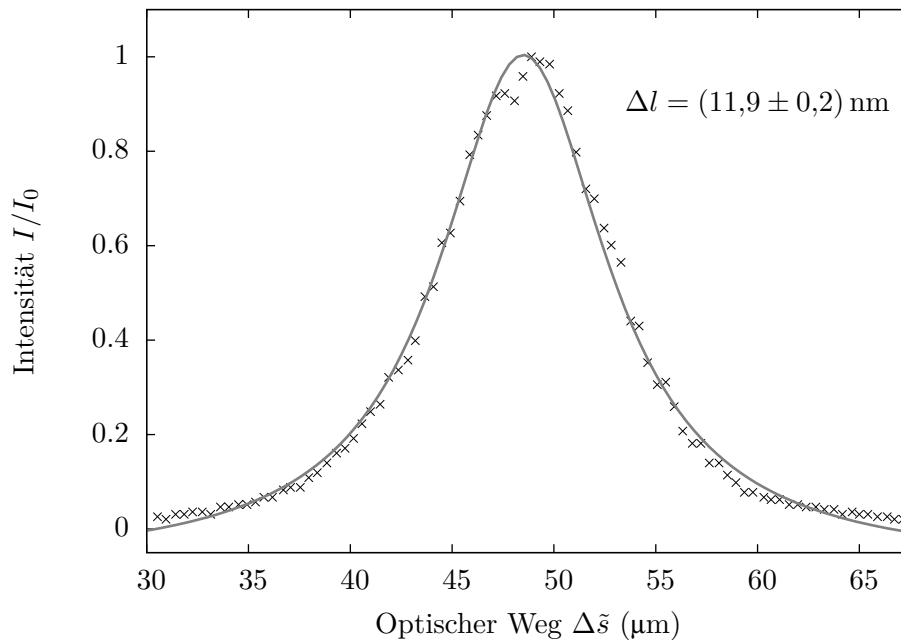


Abb. 74: Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine Lorentzfunktion angefitet und die 1/e-Breite bzw. Kohärenzlänge Δl bestimmt.

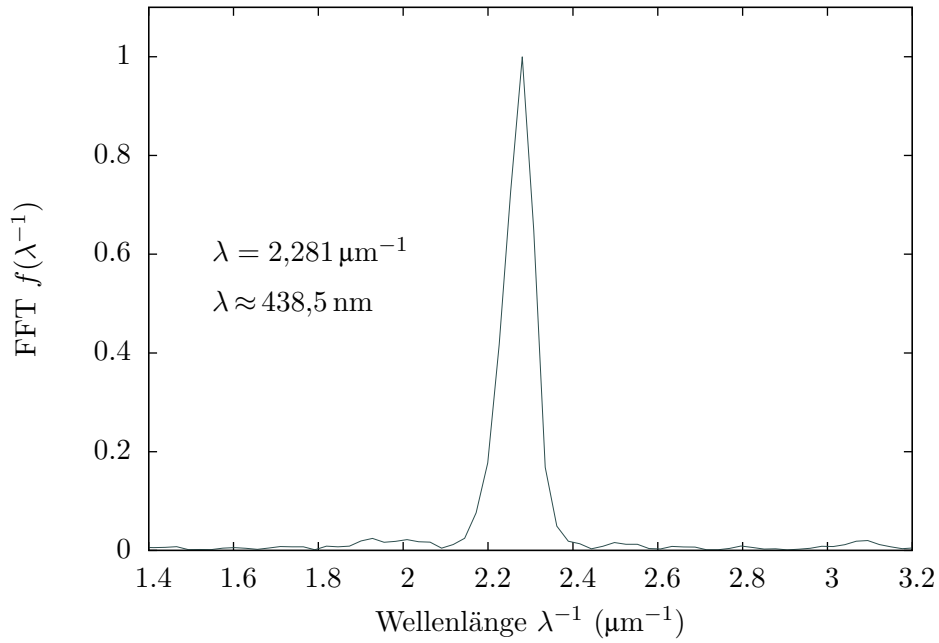


Abb. 75: Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 436 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 438,5 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt.

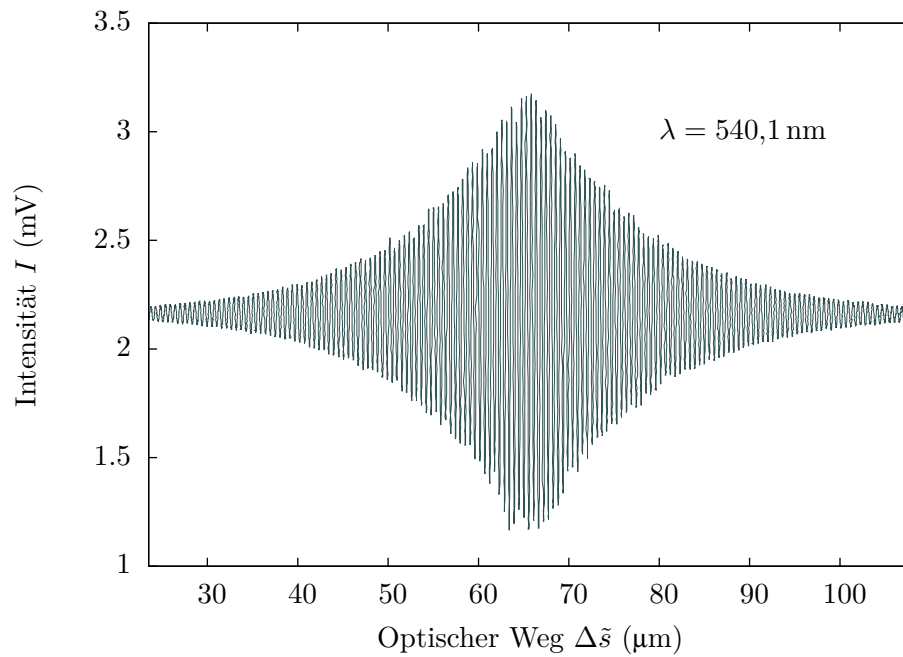


Abb. 76: Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben.

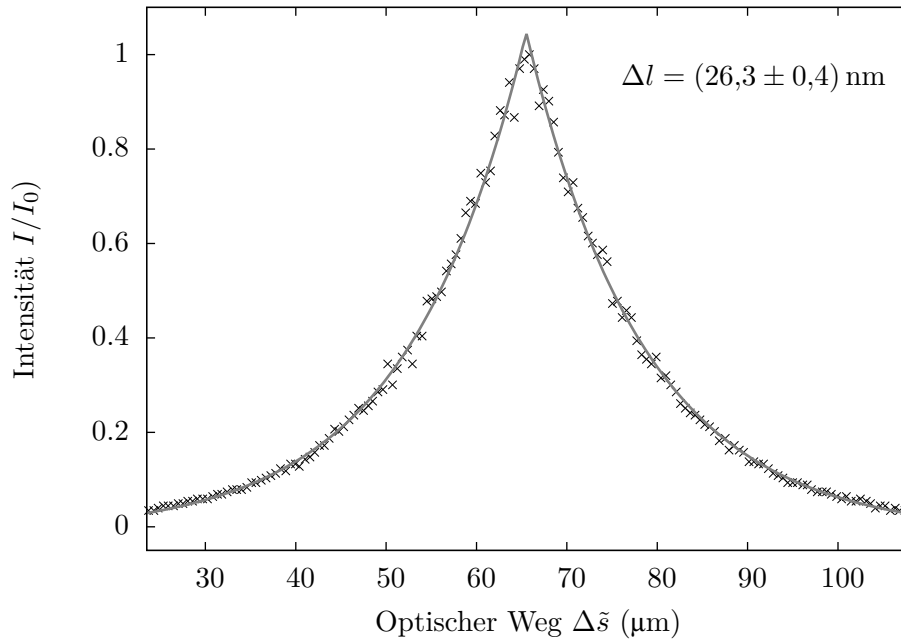


Abb. 77: Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine nach links und rechts abklingende Exponentialfunktion angefitet.

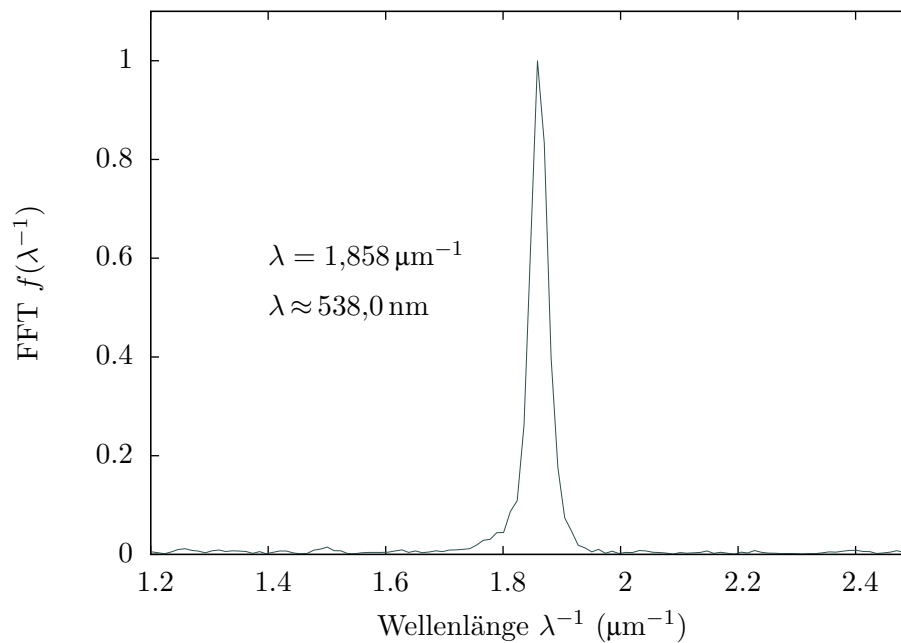


Abb. 78: Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 546 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 538 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt.

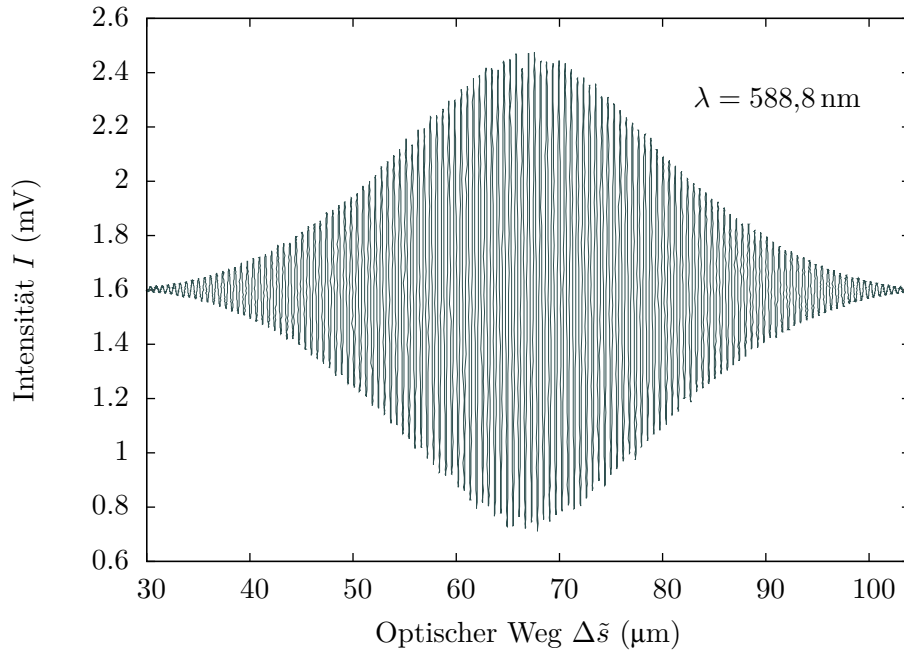


Abb. 79: Interferogramm des Transmissionsspektrums eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ des Lichts. Der Piezo wurde im Regelbetrieb betrieben.

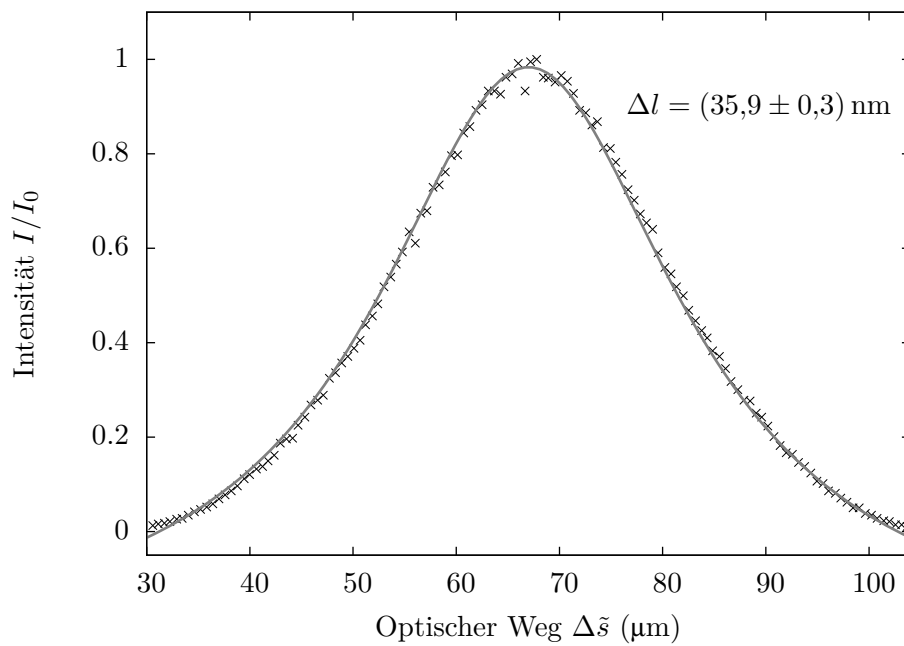


Abb. 80: Verlauf der Einhüllenden des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$ über die optische Wegstrecke $\Delta\tilde{s}$ im geregelten Modus. Es wurde eine Lorentzfunktion angefitet.

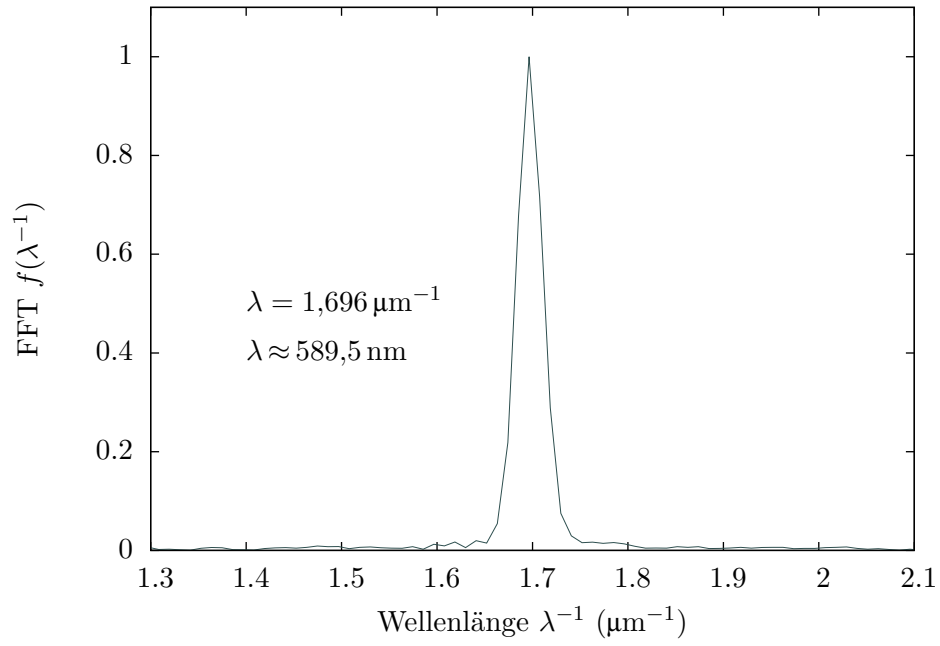


Abb. 81: Fouriertransformierte des Interferogramms eines Interferenzfilters mit $\lambda = 589 \text{ nm}$. Es wurde die Position des Maximums bei $\lambda \approx 589,5 \text{ nm}$ der Verteilung bestimmt.

Danksagung

Allen voran möchte mich bei Herr Prof. Dr. I. Rückmann dafür bedanken, dass ich im physikalischen Praktikum meine Masterarbeit schreiben konnte. Diese Arbeit wäre ohne die großartige Betreuung von Prof. Rückmann nicht möglich gewesen. Er war ebenso wie bei der Bachelorarbeit im Jahr 2012 stets an den Fortschritten und Ergebnissen der Arbeit interessiert und für jede Art von theoretischen und experimentellen Problemen ein perfekter Ansprechpartner. Ich danke zudem Herrn Prof. Dr. H. Schecker für die Zweitbegutachtung dieser Arbeit.

Überdies möchte mich beim gesamten Team der technischen Mitarbeiter des physikalischen Praktikums bedanken. Allen voran danke ich Christoph Windzio und Peter Kruse für das Interesse an den Fortschritten meiner Arbeit und die Unterstützung bei technischen Problemen sowie den zahlreichen interessanten Gesprächen.

Ein besonderer Dank gilt meinem Kommilitonen Jan Eggemann, der mich durch die Odyssee des bisherigen Studiums begleitet hat. Als Bürokollege war er stets für die eine oder andere Nachtschicht sowie fachlichen und nichtfachlichen Gesprächen zu haben. Ebenso danke ich Alexander Schulz, der es in zahlreichen Gesprächen und Kaffeepausen geschafft hat auf bewundernswerter Weise die produktive Stimmung in unserem Büro immer wieder neu zu entfachen. Ich danke auch meinem Kommilitonen Christian Deppner, der mit mir ebenfalls die ein oder andere Nachtschicht eingelegt hat.

Ebenso danke ich Babak Vosughian, der trotz seines Referendariats immer wieder Zeit gefunden hat uns in unserem Büro zu besuchen.

Mein letzter Dank gilt meiner Freundin Carolin Meyer, die mir auch bei dieser Arbeit immer den Rücken frei gehalten hat und mich immer wieder motivieren konnte sowie meinen Eltern, ohne deren Unterstützung ich das bisherige Studium nicht hätte bewältigen können.

